

هندسه ۱

سال دهم - متوسطه دوره دوم

رشته ریاضی و فیزیک

تألیف: دپارتمان هندسه خوان آموز



گروه آموزشی خوان آموز

مبتکر اولین کتاب های هوشمند ایران



پرس

بین

بخون



فهرست مطالب

۵	فصل ۱. ترسیم های هندسی و استدلال
۶	الف) ترسیم های هندسی.....
۶	درس صفر: مقدمات رسم.....
۶	معنای ترسیم در هندسه:.....
۶	چرا ما ترسیم ها را یاد میگیریم؟.....
۶	چرا اقلیدس از ترسیم ها کمک گرفت؟.....
۷	اما فاصله چیست؟.....
۷	ترسیم پاره خطی برابر با پاره خطی مفروض (کپی پاره خط).....
۸	فاصله ی یک نقطه از یک خط چیست؟.....
۸	چه رابطه ای بین خط و دایره است؟.....
۸	چه رابطه ای بین دو دایره وجود دارد؟.....
۱۰	درس اول: برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن.....
۱۰	تعریف زاویه:.....
۱۰	ترسیم یک زاویه برابر با زاویه ای مفروض (کپی زاویه).....
۱۰	تعریف نیمساز زاویه:.....
۱۲	ترسیم نیمساز یک زاویه:.....
۱۲	درس دوم: برخی از خواص عمود منصف و ترسیم آن.....
۱۲	تعریف عمود منصف یک پاره خط:.....
۱۳	ترسیم عمود منصف یک پاره خط:.....
۱۴	درس سوم: رسم خط عمود و خط موازی.....
۱۴	رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ی روی آن:.....
۱۴	رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ی غیر واقع بر آن:.....
۱۴	رسم خط عمود بر ابتدای یک نیم خط:.....
۱۴	رسم یک مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع زاویه راست:.....
۱۵	رسم خط موازی با یک خط از نقطه ی غیر واقع بر آن:.....
۱۵	ترسیم لوزی:.....
۱۶	یافتن مرکز دایره:.....
۱۷	تمرین های بخش اول - ترسیم های هندسی:.....



فصل ۱. ترسیم های هندسی و استدلال

گروه آموزشی خوان آموز

واژه هندسه (Geometry) از دو واژه ی Geo به معنای زمین و Metrein به معنای اندازه گیری آمده است. مصری ها اولین کسانی بودند که از هندسه برای کشاورزی و ساختن منابع و ابزارها استفاده می کرده اند. در این بین ترسیم اشکال هندسی یکی از مهمترین قسمت های هندسه بوده است.

اقلیدس پسر نوقطرس بن برنیقس، ریاضی دان، منجم و هندسه دان بزرگ تاریخ است که در سال ۳۲۳ ق. م متولد شد.

اقلیدس ریاضیدان یونانی ۲۳۰۰ سال قبل در شهر اسکندریه مصر که بخشی از یونان آن زمان بود زندگی می کرد.

او کتاب معروفش در زمینه هندسه را در این شهر بزرگ آموزشی نوشت.

اصول هندسه کتاب درسی اقلیدس بود که بیش از ۲۰۰۰ سال مورد استفاده مداوم قرار گرفت.



[زندگینامه کامل اقلیدس](#)



این فصل به دو بخش **ترسیم های هندسی** و **استدلال** تقسیم می شود.

الف) ترسیم های هندسی

در این بخش قرارمون این که مطالب زیر رو با هم مرور کنیم و مطالب جدید رو یاد بگیریم:

- (۱) مقدمات رسم
- (۲) برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن
- (۳) برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن
- (۴) رسم خط عمود و خط موازی

درس صفر: مقدمات رسم

معنای ترسیم در هندسه:

در ترسیم شما فقط از ابزارهای پرگار و خط کش نا مدرج استفاده میکنید. در این فرآیند شما مجاز به استفاده از نقاله برای اندازه گیری زاویه یا خط کش مدرج برای اندازه گیری طول پاره خط ها نیستید.

چرا ما ترسیم ها را یاد میگیریم؟

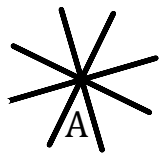
یونانیان باستان قسمت مهمی از چیزی را که امروز ما به نام هندسه می شناسیم را بیش از ۲۰۰۰ سال پیش فرمول بندی کردند. به ویژه، ریاضیدان یونانی اقلیدس تمام این فرمول ها را در کتاب ۱۳ جلدی خود به نام "اصول" که هنوز هم یکی از بهترین منابع هندسه به شمار می رود جمع آوری کرده است. در این مجموعه اقلیدس از روش ترسیم به شکل گسترده ای استفاده کرده است و به همین خاطر ترسیم تبدیل به یکی از زمینه های مهم در مطالعه هندسه شده است. آن ها همینطور در دیدن مفاهیم هندسی به ما کمک می کنند و وقتی وسایل اندازه گیری نامناسب هستند ابزاری به ما می دهند تا اشکال را رسم کنیم.

چرا اقلیدس از ترسیم ها کمک گرفت؟

چرا اقلیدس براحتی از خط کش مدرج برای اندازه گیری طول ها استفاده نکرد؟ برای مثال، یکی از ترسیم های بسیار اولیه تقسیم یک پاره خط به دو قسمت مساوی است. چرا او از خط کش مدرج برای تقسیم طول به دو قسمت استفاده نکرد؟

یک نظریه این است که یونانی ها نمی توانستند براحتی محاسبات عددی را انجام دهند. آن ها تنها اعداد طبیعی را میشناختند یعنی صفر و بقیه اعداد صحیح برای آن ها بی معنی بود. مثلاً آن ها نمی توانستند ۵ را بر ۲ تقسیم کنند چون ۲٫۵ را نمیشناختند. همینطور آن ها اعداد را مثل امروزه به صورت دسته بندی شده نداشتند یعنی ده تایی یا صدتایی یا ... نداشتند و اعداد را به صورتی که ما امروزه به آن ها اعداد یونانی می گوییم میشناختند که برای نوشتن و محاسبه بسیار نامناسب بود. مثلاً عدد ۳۰ در اعداد یونانی به صورت XXX نوشته می شود. این مشکل آن ها را برآن داشت تا از ترسیم ها برای حل مسائل هندسی استفاده کنند یعنی تنها از خط کش نامدرج و پرگار.

مثال: نقطه‌ای مثل A داده شده است. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه A می‌گذرند. اگر خط کش را در جهت مختلف طوری که نقطه A در امتداد آن باشد قرار دهیم و خط رسم کنیم به راحتی می‌توان دید که بینهایت خط از نقطه A می‌گذرند.



حالا فرض کنید نقطه‌ی متمایزی مثل B داده شده است. چند خط می‌توان رسم کرد که هم از A و هم از B می‌گذرد؟

اگر خط کش را در امتداد A, B قرار دهیم، خواهیم دید که تنها می‌توان یک خط رسم کرد.

بنابراین با داشتن دو نقطه از یک خط معین می‌توان آن خط را رسم کرد.

پس خط کش (نامدرج) تنها ابزاری برای وصل کردن نقاط به یکدیگر و ساختن خط است.

وسیله دیگری که از آن استفاده می‌کنیم پرگار است.

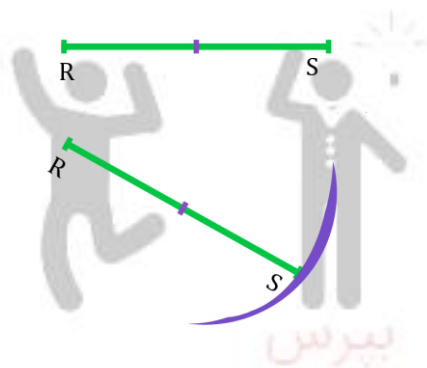
برای رسم کردن تمام نقاطی که از یک نقطه فاصله‌ی یکسانی دارند از پرگار استفاده می‌کنیم.

اما فاصله چیست؟

ما کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه یا دو شکل را فاصله بین آن دو می‌گوییم. در هندسه این کوتاه ترین مسیر همان پاره خط واصل بین دو نقطه است. در واقع ترسیم با پرگار، اولین جایی است که ما از مفهوم فاصله استفاده میکنیم. یعنی به کمک پرگار می‌توان فاصله های از قبل داده شده را رسم کرد.

ترسیم پاره خطی برابر با پاره خطی مفروض (کپی پاره خط)

فرض کنید یک پاره خط به شما داده اند (طول آن را نمیدانید) و از شما بخواهند آن را دوباره رسم کنید. دقت کنید که شما خط کش مدرجی برای اندازه گیری ندارید. برای آن کار شما دهانه پرگار را به اندازه طول پاره خط باز میکنید و دایره به اندازه آن شعاع رسم می‌کنید، حالا اگر مرکز دایره را به یکی از نقاط روی دایره وصل کنید نگاه شما پاره خطی به اندازه پاره خط قبلی دارید.

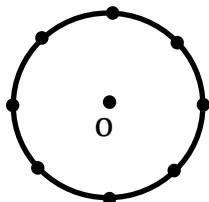


کپی پاره خط



تمرین پای تخته: مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه برابر با ۲ باشد.

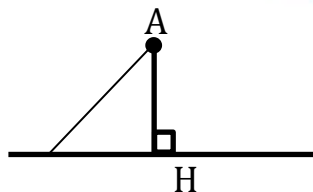
پاسخ: نقطه‌ی O را در نظر بگیرید. بینهایت نقطه در جهات مختلف نقطه‌ی O وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها تا O برابر با ۲ است. کافیهست دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کنیم و دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز O رسم کنیم.



فاصله‌ی یک نقطه از یک خط چیست؟

در واقع باید کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه و خط را بیابیم. برای این کار باید پاره‌خط عمود بر خط و گذرنده از نقطه‌ی مفروض را اندازه بگیریم.

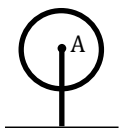
چون بنابر **قضیه فیثاغورث** هر نقطه‌ی دیگری روی خط فاصله‌اش تا نقطه مفروض بیشتر از طول پاره‌خط عمود بر خط است.



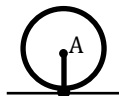
چه رابطه‌ای بین خط و دایره است؟

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L برابر با ۲ سانتی‌متر است.

اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع کمتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط نقطه‌ی مشترک ندارند.



اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.



اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع بیشتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها ۲ نقطه‌ی مشترک دارند.

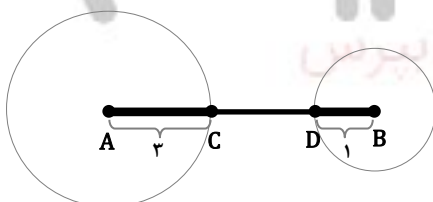


رابطه‌ی خط و دایره

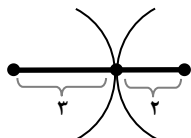
چه رابطه‌ای بین دو دایره وجود دارد؟

مثال: دو نقطه‌ی A و B و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. ابتدا دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳

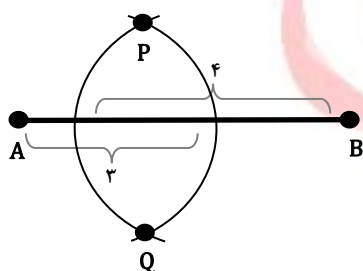
و سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱ رسم می‌کنیم.



اگر نقاط برخورد دایره ها با پاره خط AB را D, C بنامیم می بینیم که $CD = 1$ و دایره ها نقطه ی مشترک ندارند. حالا فرض کنید یکبار دایره ای به مرکز A و شعاع ۳ و بار دیگر دایره ای به مرکز B و شعاع ۲ رسم کنیم. چون مجموع دو شعاع دایره برابر با $2 + 3 = 5$ است بنابراین دو دایره تنها یک نقطه مشترک دارند.



این بار فرض کنید شعاع دایره ها را ۳ و ۴ قرار دهیم. مجموع شعاع ها $3 + 4 = 7$ بیشتر از طول پاره خط AB است. بنابراین دایره ها در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند. این دو نقطه را Q, P می نامیم. فاصله ی P, Q از نقطه A ۳ سانتی متر و از نقطه ی B ۴ سانتی متر است.

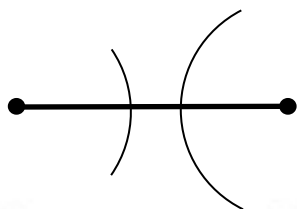


تمرین پای تخته ۲: با توجه به مثال های بالا آیا می توانید تمام روابط بین دو دایره را ترسیم کنید؟!



[روابط بین دودایره](#)

مثال: آیا می توان مثلی به ابعاد ۶، ۲ و ۳ ترسیم کرد؟



پاره خطی به طول ۶ رسم می کنیم.
از دوسر پاره خط دایره هایی به شعاع ۲ و ۳ رسم می کنیم.

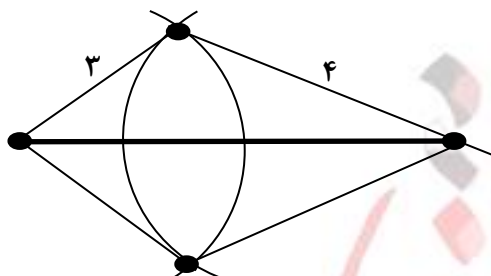
چون مجموع شعاع ها $2 + 3 = 5$ کمتر از ۶ است بنابراین نمی توان مثلی با این ابعاد رسم کرد. توجه کنید که ما اینجا داریم از نامساوی مثلی به صورت شهودی استفاده می کنیم.

بنابر نامساوی مثلی، مجموع دو ضلع همواره از ضلع سوم بزرگتر است.



مثال: آیا می توان مثلثی به ابعاد ۶ و ۳ و ۴ رسم کرد؟

با تکرار مراحل بالا و توجه به این نکته که $3+4=7$ بزرگتر از ۶ است، به راحتی مثلث مورد نظر را رسم کردیم. توجه کنید که ما دو مثلث با این ابعاد توانستیم رسم کنیم.

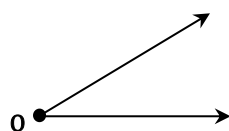


رسم مثلث با اضلاع مشخص

گروه آموزشی خوان آموز

درس اول: برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن

تعریف زاویه:



دو نیم خط با ابتدای مشترک تشکیل یک زاویه می دهند.

پس برای رسم یک زاویه کافیست با استفاده از خط کش دو نیم خط متقاطع رسم کنیم.

ترسیم یک زاویه برابر با زاویه ای مفروض (کپی زاویه)

(۱) ابتدا یک نیم خط دلخواه مثل PQ رسم می کنیم.

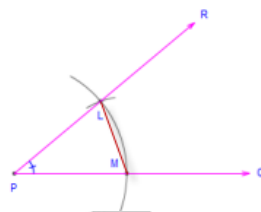
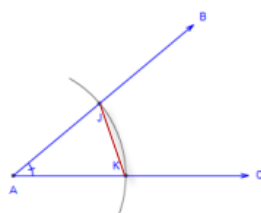
(۲) دایره ای به مرکز A و شعاع دلخواه رسم می کنیم نقاط برخورد دایره با اضلاع را J, K می نامیم.

(۳) حال دایره ای به مرکز P و همان شعاع قبلی می زنیم محل برخورد را M می نامیم.

(۴) سپس دهانه ی پرگار را به اندازه ی KJ باز می کنیم و از نقطه ی M دایره ای رسم می کنیم تا دایره

قبلی را در نقطه ای مثل L قطع کند. حال L را به P وصل می کنیم.

چون $\overline{JK} = \overline{LM}$, $\overline{AK} = \overline{AJ} = \overline{PM} = \overline{PL}$ پس $\hat{A} = \hat{P}$

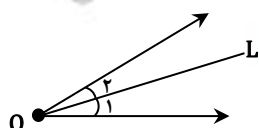


کپی زاویه

تعریف نیمساز زاویه:

نیمساز زاویه خطی است که یک زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

L , $O_1 = O_2$ نیمساز زاویه است.

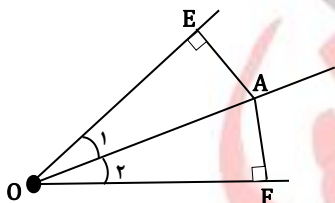


تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

تمرین پای تخته ۳: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: زاویه O و نقطه‌ی A روی نیمساز O را در نظر بگیرید.

دیدیم که فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خط عمود بر آن خط. بنابراین از نقطه A به اضلاع زاویه O عمود می‌کنیم و نقاط تقاطع را F, E می‌نامیم.



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \angle AEO = \angle AFO = 90^\circ \\ O_1 = O_2 & (\text{نقطه } A \text{ روی نیمساز است.}) \end{cases}$$

بنابر حالت وتر و یک زاویه دو مثلث قائم‌الزاویه AEO , AFO همنهشت هستند که با $\triangle AEO \cong \triangle AFO$ نشان می‌دهیم. پس $\overline{AE} = \overline{AF}$ یعنی فاصله‌ی تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه‌اند.

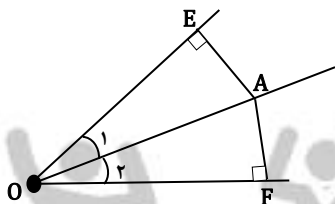


[پاسخ تشریحی](#)

اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آن‌گاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

تمرین پای تخته ۴: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: نقطه A را داخل زاویه O طوری در نظر بگیرید که فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه مقداری یکسان باشد. O را به O وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AF} & (\text{طبق فرض}) \\ \overline{AO} = \overline{AO} & (\text{ضلع مشترک}) \\ \angle AEO = \angle AFO = 90^\circ \end{cases}$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $\triangle AEO \cong \triangle AFO$ پس $O_1 = O_2$. یعنی نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه O قرار دارد.



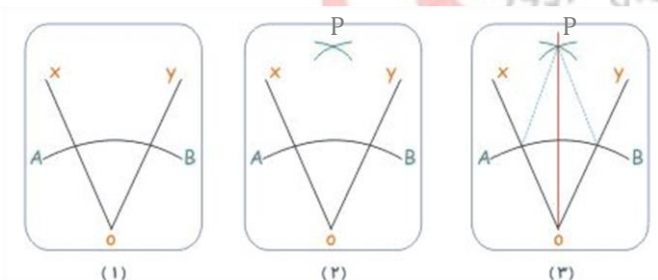
[پاسخ تشریحی](#)



ترسیم نیمساز یک زاویه:

زاویه XOY را در نظر بگیرید.

- (۱) دایره‌ای به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم کنید، نقاط برخورد را A, B می‌نامیم.
- (۲) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف فاصله‌ی A تا B باز می‌کنیم و دو دایره به مرکز A, B با شعاع یکسان رسم می‌کنیم. نقطه‌ی مشترک را P می‌نامیم.
- توجه کنید که چون مجموع دو شعاع بیشتر از طول پاره‌خط AB است دو دایره حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند.
- (۳) خط گذرنده از P, O را رسم کنیم.
- اگر نقطه‌ی P را به A, B وصل کنیم آن گاه $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OP} = \overline{OP}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ بنابراین بنا برین حالت (ضضض) $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ و در نتیجه $\angle AOP \cong \angle BOP$ یعنی P روی نیمساز O قرار دارد.



ترسیم نیمساز یک زاویه

درس دوم: برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن

تعریف عمود منصف یک پاره‌خط:

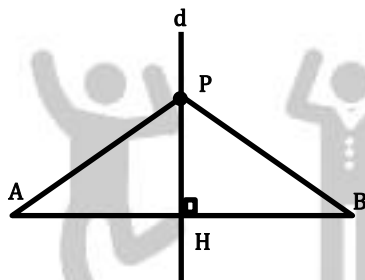
همانطور که از اسم عمود منصف پیداست، خطی است که بر پاره‌خط عمود است و آن را نصف می‌کند.

اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

تمرین پای تخته: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره‌خط AB و عمود منصف d و نقطه‌ی P روی آن را در نظر بگیرید.

نقطه P را به A, B وصل می‌کنیم. $\overline{AH} = \overline{BH}$, $\overline{PH} = \overline{PH}$, $\angle PHA = \angle PHB = 90^\circ$ پس $\triangle AHP \cong \triangle BHP$ در نتیجه $\overline{AP} = \overline{BP}$.

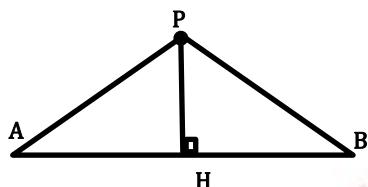


پاسخ تشریحی

اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد آن گاه آن نقطه روی عمود منصف پاره‌خط است.

تمرین پای تخته: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره خط \overline{AB} و نقطه P را طوری در نظر بگیرید که فاصله ی P تا دو سر پاره خط به یک اندازه باشد. یعنی $\overline{AP} = \overline{BP}$.



حالا از P به \overline{AB} عمود می کنیم پای عمود را H می نامیم.

$$\overline{AP} = \overline{BP}, \overline{PH} = \overline{PH}, \angle AHP = \angle BHP = 90^\circ$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $\triangle AHP \cong \triangle BHP$ در نتیجه $\overline{AH} = \overline{BH}$ پس P روی عمود منصف \overline{AB} قرار دارد.

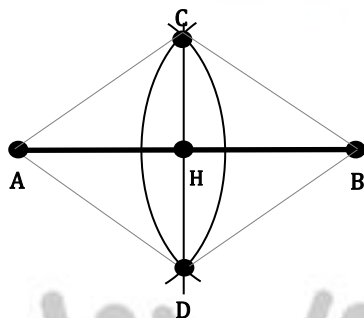


پاسخ تشریحی

ترسیم عمود منصف یک پاره خط:

پاره خط \overline{AB} در نظر بگیرید.

- (۱) دهانه ی پرگار را بیش از نصف طول \overline{AB} باز کنید و یک بار دایره ای به مرکز A و یک بار دایره ای به مرکز B و شعاع یکسان رسم کنید. نقاط برخورد را D, C می نامیم.
- (۲) خط واصل D, C را رسم می کنیم.



اگر A, B را به C وصل کنیم آن گاه $\overline{AC} = \overline{BC}$ بنابراین C روی عمود منصف \overline{AB} است و به همین ترتیب D نیز روی عمود منصف \overline{AB} است پس خط واصل D, C عمود منصف \overline{AB} است.

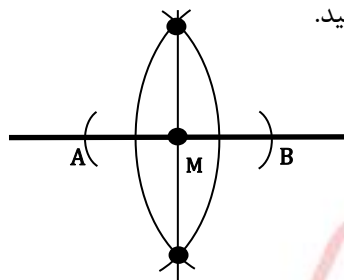


ترسیم عمود منصف



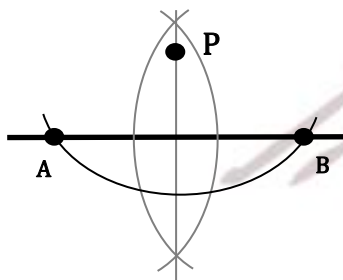
درس سوم: رسم خط عمود و خط موازی

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی روی آن:

خط d و نقطه‌ی M را روی آن در نظر بگیرید.(۱) دایره‌ای به مرکز M و شعاع دلخواه رسم کنید. نقاط برخورد را A , B بنامید.(۲) عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنید.در این صورت خطی عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که از نقطه M می‌گذرد.

روش رسم

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی غیرواقع بر آن:

خط d و نقطه خارج آن را در نظر بگیرید.(۱) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از فاصله P تا خط d باز کرده و یک دایره رسم می‌کنیم. نقاط برخورد را A , B می‌نامیم.(۲) عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.نقطه‌ی P از نقاط A , B به یک فاصله است پس P روی عمود منصف پاره‌خط AB و در نتیجه روی خط عمودبر خط d قرار دارد.

روش رسم

رسم خط عمود بر ابتدای یک نیم خط:

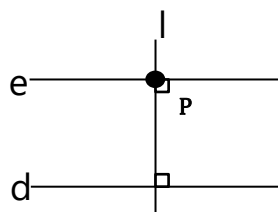


روش رسم

رسم یک مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع زاویه راست:



روش رسم

رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ی غیر واقع بر آن:

خط d و نقطه P خارج از آن را در نظر بگیرید.

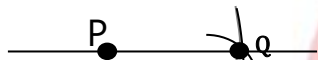
(۱) خط عمود بر d و گذرنده از نقطه‌ی P را رسم کنید، آن را l می‌نامیم.

(۲) خط عمود بر l و گذرنده از نقطه P را رسم کنید، آن را e می‌نامیم.

خط l را به عنوان خط مورب گذرنده از e, d دو خط در نظر می‌گیریم. چون تمام زوایای حاصل با هم مساوی و برابر با 90° هستند بنابراین خط e با خط d موازی است.

راه حل دوم:

(۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از فاصله‌ی P تا خط d باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم. نقاط برخورد را A, B می‌نامیم.



(۲) دایره‌ای به مرکز B و شعاع \overline{AP} رسم می‌کنیم.

(۳) دایره‌ای به مرکز P و شعاع \overline{AB} رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد را Q می‌نامیم.

(۴) خط گذرنده از Q, P را رسم می‌کنیم.

چون $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ، $\overline{AP} = \overline{BQ}$ است بنابراین چهار ضلعی $ABPQ$ یک متوازی الاضلاع است. در نتیجه خط

گذرنده از PQ با خط d موازی است.

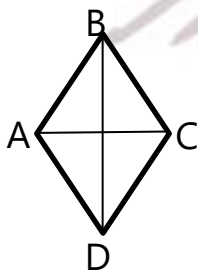


روش رسم

ترسیم لوزی:

قبل از روش ترسیم، خواص لوزی را یادآوری می‌کنیم:

- ضلع های روبرو موازی اند.
- تمام اضلاع برابرند.
- زوایای روبرو دو به دو برابرند.
- قطر ها عمود منصف یکدیگرند.
- زوایای مجاور مکمل اند.
- دارای ۲ محور تقارن است.
- قطر ها نیمساز زاویه ها هستند.



تمرین پای تخته ۷: لوزی با قطر هایی به طول ۶ و ۴ رسم کنید.

پاسخ:

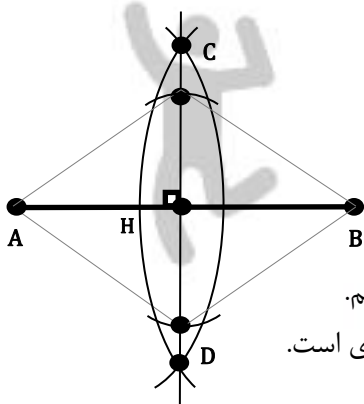
(۱) پاره خط \overline{AB} به طول ۶ رسم می‌کنیم.

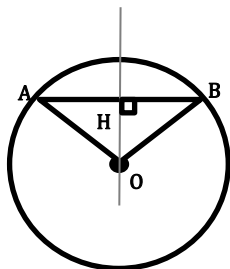
(۲) عمود منصف \overline{AB} را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد با \overline{AB} را H می‌نامیم.

(۳) دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کرده و دایره‌ای به مرکز H و شعاع ۲ می‌زنیم،

(۴) نقاط برخورد با عمود منصف را D, C می‌نامیم و D, C را به B, A وصل می‌کنیم.

چون قطر ها برهم عمود و منصف یکدیگر هستند پس چهار ضلعی $ABCD$ یک لوزی است.





یافتن مرکز دایره:

می‌دانیم که عمودمنصف وتر یک دایره از مرکز آن می‌گذرد.

دایره‌ای به مرکز O و وتر \overline{AB} در آن در نظر بگیرید.

از O به \overline{AB} عمود می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد H را می‌نامیم.

$$\overline{OH} = \overline{OH}, \overline{OA} = \overline{OB}, H_1 = H_2 = 90^\circ$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $\triangle OAH \cong \triangle OBH$ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$ در نتیجه عمودمنصف وتر \overline{AB} از O می‌گذرد.

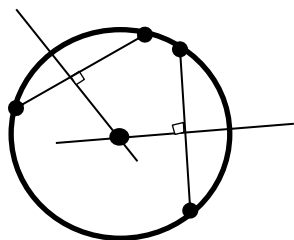
پس برای یافتن مرکز یک دایره کافیست:

(۱) دو وتر از دایره را که با هم موازی نیستند رسم می‌کنیم.

(۲) عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم. چون عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند،

بنابراین:

محل برخورد عمود منصف های دو وتر غیرموازی در دایره، مرکز دایره است.



روش رسم



پرس



بین



بخون



مدرس: سیدابوذر حسینی



* نسبت و تناسب

تعریف: نسبت عدد a به عدد $b \neq 0$ عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$

تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ یک تناسب نامیده می شود: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال: در تناسب های زیر، مقدار x و y را بیابید.

الف) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ طرفین - وسطین $\rightarrow 4x = 3x + 2 \rightarrow x = 2$

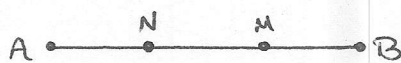
ب) $\frac{3}{y} = \frac{y}{27}$ طرفین - وسطین $\rightarrow y^2 = 3 \times 27 = 81 \rightarrow y = \pm 9$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، عدد b میانگین هندسی دو عدد a و c نامیده می شود و مقدار آن از رابطه $b^2 = ac$ به دست می آید.

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را بیابید.

$b^2 = 4 \times 25 = 100 \rightarrow b = \pm 10$

تست: روی پاره خط $AB = 12$ ، دو نقطه M و N را چنان انتخاب می کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$ ، در این صورت طول پاره خط MN کدام است؟



$\frac{AM}{MB} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب درخرج}} \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \rightarrow AM = 8$

$\frac{BN}{AN} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب درصورت}} \frac{AB}{AN} = 3 \rightarrow AN = 4$

$MN = AM - AN = 8 - 4 = 4$

۱) ۳

۳) ۴

مثال: با توجه به شکل مقابل، جاهای خالی را پر کنید.

الف) اگر AB را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می شود:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CM$

ب) اگر AC را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می شود:

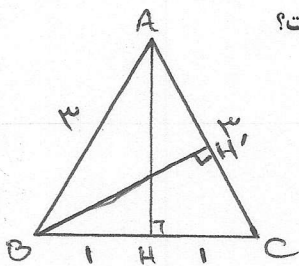
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BN$

پ) از الف) و ب) داریم:

$AB \times CM = AC \times BN \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{CM}$

نتیجه: در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع های آن ها برابر است.

تست: اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتی متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی متر است؟



ابتدا ارتفاع AH را رسم می کنیم:

$ABH: AH^2 + 1^2 = 3^2 \rightarrow AH^2 = 8 \rightarrow AH = \sqrt{8}$

حال اگر ارتفاع BH' را رسم کنیم، طبق نتیجه فوق داریم:

$AH \times BC = BH' \times AC$

$\sqrt{8} \times 2 = BH' \times 3 \rightarrow BH' = \frac{2\sqrt{8}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۱)

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۴)





ویژگی‌های تناسب:

(۱) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ با عمل طرفین-وسطین تساوی $ad=bc$ را خواهیم داشت.

(۲) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان کسرهای را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ را به دست آورد.

(۳) در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله‌ی میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ را به دست آورد.

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & \text{ترکیب در صورت} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} & \text{ترکیب در مخرج} \end{cases}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} & \text{تفصیل در صورت} \\ \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} & \text{تفصیل در مخرج} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{b+d} = k \\ \frac{a+c+e}{b+d+f} = k \end{cases}$

$\frac{x-y}{2x+y} = \frac{2}{5}$
 $\frac{x-y}{2x+y} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین} \times 5} 5x-5y = 4x+2y$
 $\rightarrow 5x-4x = 5y+2y \rightarrow x=7y \rightarrow \frac{x}{y} = 7$

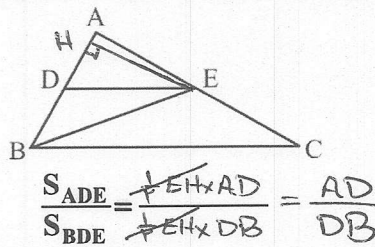
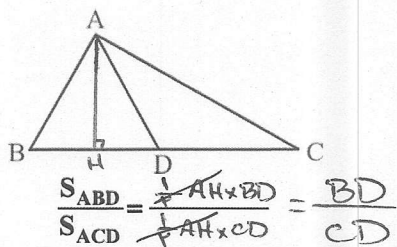
تست: اگر $\frac{x-y}{2x+y} = \frac{2}{5}$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{2}$ ✓
 ۲) $\frac{5}{3}$
 ۳) $\frac{5}{2}$
 ۴) $\frac{7}{3}$

مثال: اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 5$ باشد، مقدار $\frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}$ را بیابید.

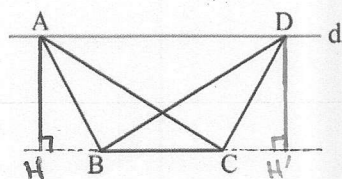
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین} \times 5} \frac{2a}{2a'} = \frac{3b}{3b'} = \frac{-4c}{-4c'} = 5$
 $\xrightarrow{\text{نسبت تناسب}} \frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'} = 5$

مثال: در شکل‌های زیر، نسبت مساحت دو مثلث خواسته شده را بنویسید.



نتیجه ۱: هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.

نتیجه ۲: اگر دو مثلث یک رأس مشترک داشته باشند و قاعده‌ی مقابل به این رأس در دو مثلث روی یک خط راست قرار داشته باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های آن‌ها.



مثال: در شکل مقابل، $d \parallel BC$ است. نشان دهید: $S_{ABC} = S_{DBC}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \times AH$
 $S_{DBC} = \frac{1}{2}BC \times DH'$
 $AH = DH' \rightarrow S_{ABC} = S_{DBC}$

نتیجه: اگر دو مثلث، قاعده‌ی مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده‌ی مشترک، روی یک خط موازی این قاعده باشند، مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.



تقرین (صفحه ۳۳ کتاب):

۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

ویرایش تناسبی $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{3}{5}$ $\rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{3}{5} \rightarrow x+y+z = \frac{3 \times 11}{5} = \frac{33}{5}$

۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$b^2 = 8 \times 10 = 80 \rightarrow b = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

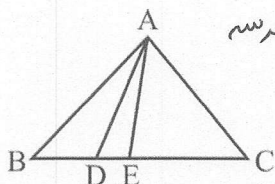
۳- طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی متر است. طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

بلندترین ارتفاع پیکوتاه ترین ضلع وارد می شود:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times h_p = \frac{1}{2} \times 8 \times h_p$$

$$h_p = \frac{4\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{BD}{DE}$ را به دست آورید. هاله ها هر سه مثلث روی یک خط بوده و رأس A در هر سه مستقیم است و پس نسبت مساحت ها، برابر نسبت قاعده ها است.



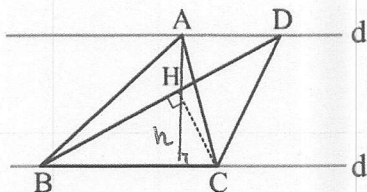
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = 3 \rightarrow \frac{EC}{DE} = 3 \rightarrow DE = \frac{1}{3} EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = 2 \rightarrow \frac{EC}{BD} = 2 \rightarrow BD = \frac{1}{2} EC$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{1}{3} EC}{\frac{1}{2} EC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{DE} = \frac{\frac{1}{2} EC + \frac{1}{3} EC + EC}{\frac{1}{3} EC} = \frac{\frac{11}{6} EC}{\frac{1}{3} EC} = \frac{11}{2}$$

۵- در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر 8 cm^2 است. اگر $BD = 6 \text{ cm}$ باشد، فاصله ی نقطه ی C از BD را به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \times h \rightarrow S_{DBC} = 8$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} BD \times CH = 8 \rightarrow 3 CH = 8 \rightarrow CH = \frac{8}{3}$$



* قضیه تالس

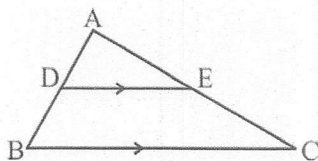
قضیه: در مثلث ABC شکل مقابل، اگر پاره خط DE موازی BC رسم شود،

آنگاه پاره خطهای ایجاد شده روی AB و AC با یکدیگر متناسباند:

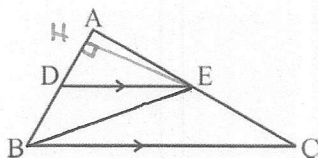
فرض: $DE \parallel BC$

جزء به جزء: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ حکم

اثبات: مرحله اول: از E به B وصل می‌کنیم:

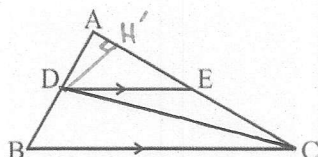


$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2} EH \times AD}{\frac{1}{2} EH \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (1)$$



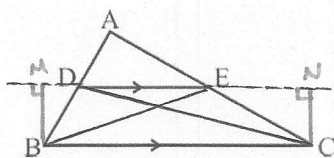
مرحله دوم: از D به C وصل می‌کنیم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AE}{\frac{1}{2} DH' \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$



مرحله سوم: حال باید نشان دهیم: $S_{BDE} = S_{CDE}$

$$\begin{aligned} S_{BDE} &= \frac{1}{2} DE \times BM \\ S_{CDE} &= \frac{1}{2} DE \times CN \end{aligned} \quad \begin{aligned} &BM = CN \\ &\text{فاصله دو خط} \\ &\text{موازی برابر} \end{aligned} \quad S_{BDE} = S_{CDE} \quad (3)$$



$$(1), (2), (3) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} &= \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{چیز به چیز}$$

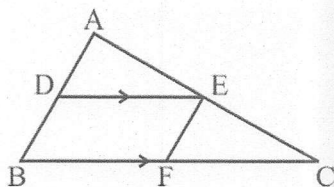


نتیجه ۱:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \rightarrow \boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}$$

جزء به کل از بالا

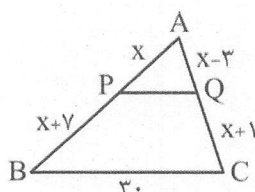
نتیجه ۲ (تعمیم قضیه تالس):



$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}}$$

برهان: مطابق شکل، از نقطه E، پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم،

$$\begin{aligned} \{ \begin{aligned} DE &\parallel BF \\ DB &\parallel EF \end{aligned} \} &\rightarrow \text{موازی الاضلاع} \rightarrow DEFB \rightarrow DE = BF \\ EF &\parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از پایین}} \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \boxed{\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}} \end{aligned}$$

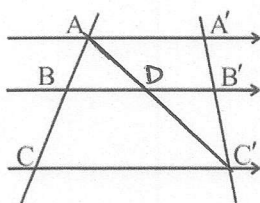
مثال: در شکل مقابل، $PQ \parallel BC$ است:

الف) مقدار x را بیابید.

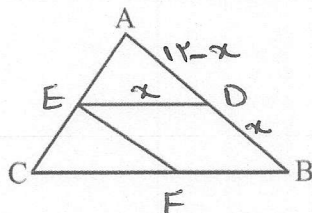
$$\begin{aligned} PQ \parallel BC &\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \\ \rightarrow x(x+1) &= (x-3)(x+7) \rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \\ \rightarrow x - 4x &= -21 \rightarrow -3x = -21 \rightarrow \boxed{x = 7} \end{aligned}$$

ب) طول PQ را بیابید.

$$\text{جزء به کل: } \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \rightarrow \frac{PQ}{30} = \frac{7}{7+14} \rightarrow \frac{PQ}{30} = \frac{7}{21} \rightarrow \boxed{PQ = 10}$$

تست: در شکل مقابل می دانیم $AB = 16$ و $BC = 24$ و $A'C' = 30$ ، طول $A'B'$ چقدر است؟

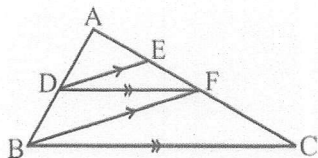
$$\begin{aligned} \triangle ACC' : \frac{AB}{BC} &= \frac{AD}{DC'} \Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{A'B'}{30 - A'B'} \\ \triangle A'B'C' : \frac{A'B'}{B'C'} &= \frac{AD}{DC'} \Rightarrow \frac{A'B'}{30 - A'B'} = \frac{16}{24} \\ \rightarrow 40 - 2A'B' &= 3A'B' \rightarrow 40 = 5A'B' \rightarrow \boxed{A'B' = 8} \end{aligned}$$

تست: در شکل مقابل، یک لوزی در مثلث ABC محاط شده است به طوری که B، رأس لوزی و دو ضلع مجاور آن روی AB و BC قرار دارد. اگر $AB = 12$ و $BC = 18$ و $AC = 9$ باشد، طول ضلع لوزی کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{ضلع لوزی را } x \text{ می گیریم:} \\ \triangle ADE : \frac{DE}{BC} &= \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{x}{18} = \frac{12-x}{12} \rightarrow 12x = 36 - 3x \rightarrow 15x = 36 \rightarrow \boxed{x = \frac{36}{5}} \end{aligned}$$



مثال مهم: در شکل مقابل، $DE \parallel BF$ و $DF \parallel BC$ است:



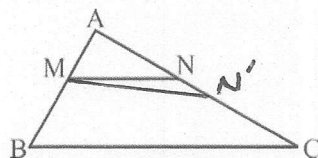
الف) ثابت کنید: $\frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$

$$\begin{aligned} \triangle ABF: DE \parallel BF &\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF} \\ \triangle ABC: DF \parallel BC &\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AF}{FC}$$

ب) ثابت کنید: $AF^2 = AE \times AC$ (AF میانگین هندسی AE و AC است)

$$\begin{aligned} \triangle ABF: \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AF} \\ \triangle ABC: \frac{AD}{AB} &= \frac{AF}{AC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AF}{AC} \rightarrow AF^2 = AE \times AC$$

عکس قضیه تالس:



در مثلث ABC، اگر نقاط M و N روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب شوند که تناسب

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

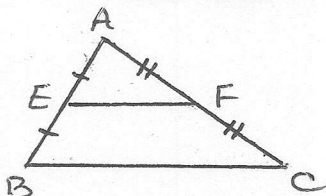
برقرار باشد، آنگاه $MN \parallel BC$ است. اثبات یا برعکس خلف: فرض می‌کنیم

MN موازی BC نیست پس پاره خطی مانند MN' موازی BC وجود دارد:

$$MN' \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC} \xrightarrow{\text{فرض: } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}} \frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC} \rightarrow AN' = AN \text{ غیر ممکن}$$

پس فرض خلف (نقض حکم) نادرست بوده و درستی حکم یعنی موازی بودن MN با BC ثابت می‌شود.

مثال مهم (قضیه میانه خط مثلث): ثابت کنید پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی و نصف ضلع سوم است.



ف: $\begin{cases} AE = EB \\ AF = FC \end{cases}$

ح: $\begin{cases} EF \parallel BC \\ EF = \frac{BC}{2} \end{cases}$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = 1 \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} EF \parallel BC$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{EF}{BC} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2} \rightarrow EF = \frac{BC}{2}$$

مثال مهم (قضیه میانه خط ذوزنقه): ثابت کنید پاره خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی و نصف مجموع دو

ف: $\begin{cases} AE = ED \\ BF = FC \end{cases}$

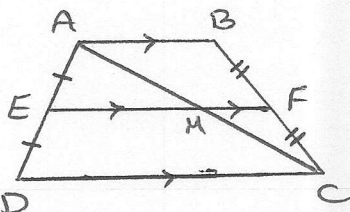
ح: $\begin{cases} EF \parallel AB \text{ و } CD \\ EF = \frac{AB + CD}{2} \end{cases}$

با فرض اثبات قسمت اول حکم، قسمت دوم را فقط اثبات می‌کنیم:

$$\triangle ADC: EM \parallel DC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{EM}{DC} = \left(\frac{AE}{AD}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow EM = \frac{DC}{2}$$

$$\triangle ABC: MF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{MF}{AB} = \left(\frac{CF}{CB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow MF = \frac{AB}{2}$$

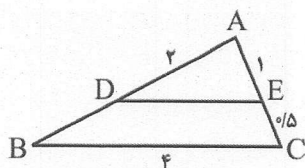
$$EF = EM + MF = \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2} \rightarrow EF = \frac{AB + CD}{2}$$





تحریر: [صفحه ۳۶ کتاب]:

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌ها طول‌های DE و AB را به دست آورید.

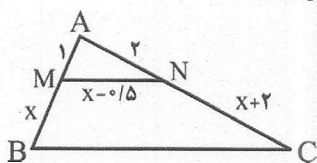


$$\text{جزء به جزء: } \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{1}{1.5} = \frac{2}{AB} = \frac{DE}{4} \rightarrow DE = \frac{4}{1.5}$$

$$\rightarrow DE = \frac{8}{3}$$

$$\rightarrow AB = 3$$

۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ باشد، مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

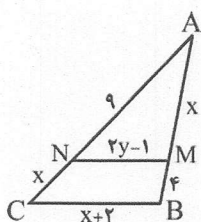


$$\text{جزء به جزء: } \frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow 2x = x+2 \rightarrow x = 2$$

$$\text{جزء به جزء: } \frac{x-1.5}{BC} = \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1.5}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow BC = 3 \times 1.5$$

$$\rightarrow BC = 4.5$$

۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.

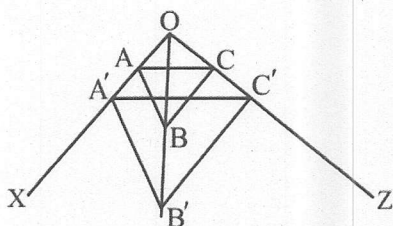


$$\text{جزء به جزء: } \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \rightarrow \frac{9}{x} = \frac{4}{x} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$$

$$\text{جزء به جزء: } \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \rightarrow \frac{2y-1}{10} = \frac{4}{4+6} \rightarrow \frac{2y-1}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\rightarrow 10y - 10 = 40 \rightarrow 10y = 50 \rightarrow y = 5$$

۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ است. با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



$$\triangle OAB: AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

$$\triangle OBC: BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} \triangle OA'C': AC \parallel A'C'$$

۵- در متن جزوه حل شد.

۶- در کتاب حل شود.

۷- در متن جزوه حل شد.

۸- در کتاب حل شود.



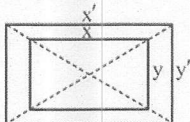
* تشابه

تعریف: دو چندضلعی را متشابه گوئیم هرگاه زوایای نظیرشان با هم برابر بوده و اضلاع نظیرشان با هم متناسب باشند.



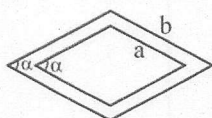
نتیجه ۱: دو n ضلعی منتظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

نتیجه ۲: دو مستطیل زاویه‌هایشان همواره برابر است، لذا اگر نسبت طول به عرضشان نیز برابر باشد، متشابه‌اند.



$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Rightarrow \text{دو مستطیل متشابه‌اند}$$

نتیجه ۳: دو لوزی اضلاعشان همواره متناسب است، پس اگر یک زاویه‌ی برابر داشته باشند، متشابه‌اند.



✓ تست: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

(۲) دو مثلث قائم‌الزاویه همواره متشابه‌اند.

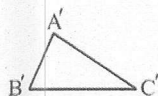
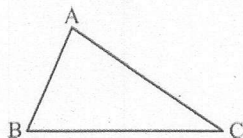
(۱) دو مستطیل همواره متشابه‌اند.

(۴) دو لوزی همواره متشابه‌اند.

✓ (۳) دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه‌اند.

مثلث‌های متشابه:

هرگاه زوایای دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر و اضلاع نظیر، متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

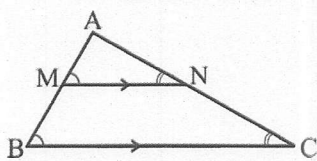


$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

k را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم.

قضیه‌ی (اساسی تشابه مثلث‌ها)

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$MN \parallel BC \begin{cases} \xrightarrow{\text{موازی بر AB}} \hat{M} = \hat{B} \quad (1) \\ \xrightarrow{\text{موازی بر AC}} \hat{N} = \hat{C} \quad (2) \end{cases}$$

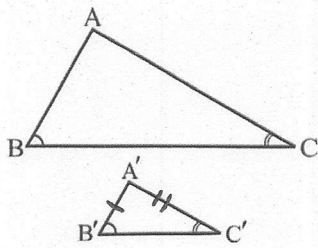
$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{جمله‌ی کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

اثبات:



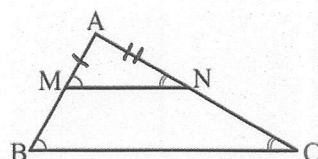
حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها، سه حالت مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم. راهبرد اصلی ما برای اثبات این سه قضیه این است که روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا کرده و ثابت می‌کنیم که MN موازی BC است.
حالات تشابه دو مثلث



۱- هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

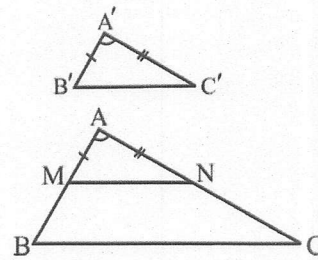
اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:



$$\begin{aligned} & \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ \end{cases} \xrightarrow[\hat{C} = \hat{C}']{B = B'} \hat{A} = \hat{A}' \quad (1) \\ & \begin{cases} AM = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \quad (1) \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} \hat{M} = \hat{B}' \\ \hat{N} = \hat{C}' \\ MN = B'C' \end{cases} \quad (3) \\ & \begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{M} = \hat{B}' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \hat{M} = \hat{B} \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} MN \parallel BC \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \xRightarrow{(2)} \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

۲- هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.



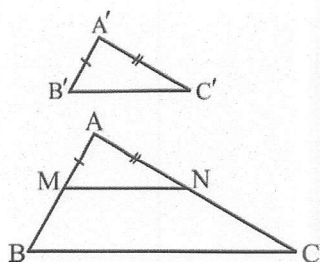
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AM = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق برهان}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (1) \\ & \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow[\text{عکس تالس}]{\text{طبق فرض داریم}} MN \parallel BC \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \xRightarrow{(1)} \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$





۳- هرگاه اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه امپاطی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \quad (1)$$

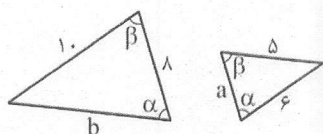
$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{جانب کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{A'B' - A'C'}{AB - AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$MN = B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN = B'C' \\ AM = A'B' \\ AN = A'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

نکته: در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناسب، روبرو به زاویه‌های برابرند.

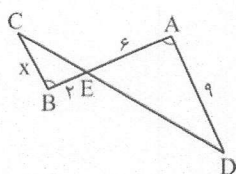
تست: دو مثلث مقابل متشابه‌اند. کدام $a+b$ است؟



$$\frac{1}{a} = \frac{10}{5} = \frac{b}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow a+b=16$$

۱۶ (۱)✓

۱۲ (۳)

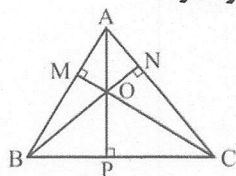


$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زاویه}} \triangle AED \sim \triangle BEC \rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{6}{4} = \frac{9}{x} \rightarrow x=6$$

۳ (۳)✓

تست: در شکل مقابل، M و N پای ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشند. چند مثلث متشابه با مثلث AOM وجود دارد؟



$$\triangle AOM \sim \triangle OPC \sim \triangle ABP \sim \triangle CBM$$

۲ (۲)

۱ (۱)

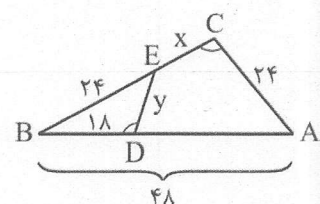
۳ (۳)✓

تست: طول اضلاع یک مثلث ۳ و ۴ و ۶ می‌باشد. این مثلث با مثلثی با کدام طول اضلاع متشابه است؟

۱۸ و ۸ و ۱۹ (۲) ۶ و ۶ و ۸ (۱) ۴ و ۷/۵ و ۱۰ و ۱۲ (۴) ۴/۵ و ۹ و ۶ (۳)✓

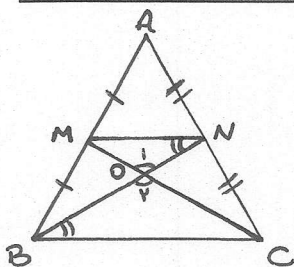
$$\frac{3}{4.5} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

مثال: در شکل مقابل، $\hat{C} = \hat{D}$ می‌باشد. x و y را بیابید.



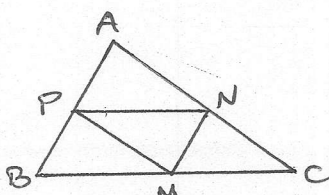
$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{زاویه}} \triangle BDE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

$$\rightarrow \frac{24}{x+24} = \frac{18}{x+24} = \frac{8}{24} \Rightarrow \begin{cases} \frac{18}{x+24} = \frac{1}{3} \rightarrow x=12 \\ \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \rightarrow y=12 \end{cases}$$



مثال: در شکل مقابل، BN و CM دو میانه‌ی مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\triangle OMN \sim \triangle OBC$

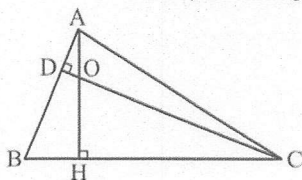
$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$ (عکس تالس) $\rightarrow MN \parallel BC \rightarrow \hat{N} = \hat{B}$ (هم‌طور)
 $\begin{cases} \hat{N} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle OMN \sim \triangle OBC$



مثال: وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M و N و P می‌نامیم. نشان دهید: $\triangle MNP \sim \triangle ABC$

MP و NP میان خط‌های مثلث ABC می‌سند، لذا داریم:

$\begin{cases} MN = \frac{1}{2} AB \\ MP = \frac{1}{2} AC \\ NP = \frac{1}{2} BC \end{cases} \rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}$ (نسب متساوی) $\rightarrow \triangle MNP \sim \triangle ABC$ (متشابه)

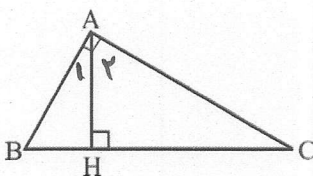


تست: در شکل مقابل، AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $AD = DO = OH = \frac{1}{3} AH$ ، طول HC کدام است؟

$\begin{cases} OD = OH \\ \hat{H} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle AOD \sim \triangle COH \rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AD}{CH} = \frac{OD}{OH}$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{HC} = \frac{1}{5 \times 4} \rightarrow HC = 180$

۱۶۵ (۱)
 ۱۷۰ (۲)
 ۱۷۵ (۳)
 ۱۸۰ (۴) ✓



مثال مهم (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه): در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC شکل مقابل،

الف) ثابت کنید دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AB^2 = BH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle ABH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$

\downarrow

$AB^2 = BH \times BC$

ب) ثابت کنید دو مثلث ACH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AC^2 = CH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle ACH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$

\downarrow

$AC^2 = CH \times BC$

پ) با استفاده از دو قسمت (الف) و (ب) قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \xrightarrow{+} AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$BC \times (BH + CH)$

ت) ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AH^2 = BH \times CH$ (واسطه هندسی بین BH و CH)

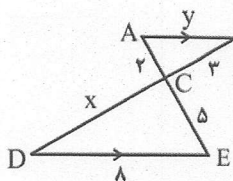
$\triangle ABH: \hat{A}_1 + \hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{A_1 + A_2 = 90^\circ} \hat{A}_2 = \hat{B}$

$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle ABH \sim \triangle ACH \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$

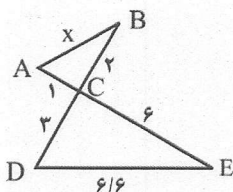
\downarrow

$AH^2 = BH \times CH$

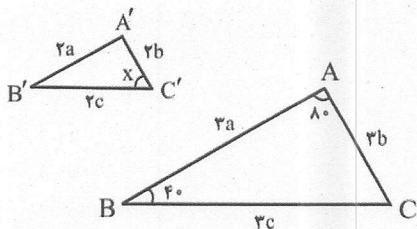
تمرین (صفحه ۴۲ کتاب):

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید.

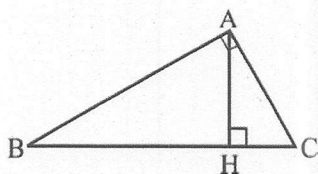
$$\begin{aligned} \angle A &= \angle E, \angle B = \angle D \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{CD} \\ \frac{2}{4} &= \frac{3}{8} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \angle A &= \angle E, \angle B = \angle D \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{CD} \\ \frac{1}{6} &= \frac{2}{6} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{AC}{A'C} &= \frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \angle A = \angle A' \\ \angle A + \angle A' + \angle C &= 180^\circ \Rightarrow \angle C = 40^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \end{aligned}$$



۲- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، به کمک روابط طولی، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

$$\begin{aligned} AH^2 &= BH \times CH = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6 \\ AB^2 &= BH \times BC = 9 \times (9+4) = 9 \times 13 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13} \\ AC^2 &= CH \times BC = 4 \times 13 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

۲) $AB=10$, $BC=12$, $AC=?$, $AH=?$

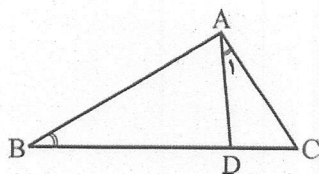
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \Rightarrow 10^2 + AC^2 = 12^2 \Rightarrow AC^2 = 144 - 100 = 44 \Rightarrow AC = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \\ AC^2 &= CH \times BC \Rightarrow 44 = CH \times 12 \Rightarrow CH = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} \\ AH^2 + CH^2 &= AC^2 \Rightarrow AH^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 44 \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$

۳) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10 \\ AB^2 &= BH \times BC \Rightarrow 8^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = \frac{64}{10} \\ AC^2 &= CH \times BC \Rightarrow 6^2 = CH \times 10 \Rightarrow CH = \frac{36}{10} \end{aligned}$$

۴) $AB=8$, $AH=4$, $BC=?$, $AC=?$

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \times BC \Rightarrow 8^2 = BH \times BC \Rightarrow BH = \frac{64}{BC} \\ AC^2 &= CH \times BC \Rightarrow 4^2 = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{16}{BC} \\ BH + CH &= BC \Rightarrow \frac{64}{BC} + \frac{16}{BC} = BC \Rightarrow \frac{80}{BC} = BC \Rightarrow BC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\ AC^2 &= CH \times BC = \frac{16}{4\sqrt{5}} \times 4\sqrt{5} = 16 \Rightarrow AC = 4 \end{aligned}$$



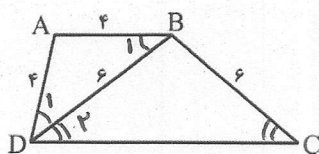
۳- در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $AC = 4$ و $BD = 6$ است. طول BC را به دست آورید.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{z} \triangle ACD \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{\frac{4}{AC}}{BC} = \frac{\frac{BC-BD}{DC}}{\frac{AC}{4}} = \frac{AD}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{4}{BC} = \frac{BC-4}{4} \rightarrow 14 = BC^2 - 4BC$$

$$\rightarrow BC^2 - 4BC - 14 = 0 \rightarrow (BC-1)(BC+2) = 0$$

\downarrow
 $BC = 1$ $\rightarrow BC = -2$ غلط



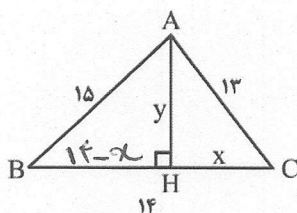
۴- در شکل مقابل، ABCD دوزنقه است. طول قاعده‌ی CD را به دست آورید.

$$\begin{aligned} BC &= BD \rightarrow \hat{D}_2 = \hat{C} \\ AB &= AD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB \parallel DC, \text{ و } BD \text{ وتر} &\rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_2 \end{aligned} \left\{ \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \right.$$

س دو مثلث ABD و BCD به حالت دوزاویه متشابه اند:

$$\rightarrow \frac{\frac{4}{AB}}{\frac{BD}{4}} = \frac{\frac{4}{AD}}{\frac{BC}{4}} = \frac{BD}{DC} \rightarrow 4DC = 34 \rightarrow DC = 9$$

۵- در شکل مقابل، مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



$$\triangle ACH: x^2 + y^2 = 13^2 \quad \ominus \rightarrow x^2 - (14-x)^2 = 13^2 - 15^2$$

$$\triangle ABH: (14-x)^2 + y^2 = 15^2$$

$$\rightarrow x^2 = 194 - x^2 + 28x = 179 - 225$$

$$\rightarrow 28x = 194 + 149 - 225 = 118 \rightarrow x = 5$$

$$\rightarrow 5^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow y^2 = 179 - 25 = 154 \rightarrow y = 12$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 14 = 84$$

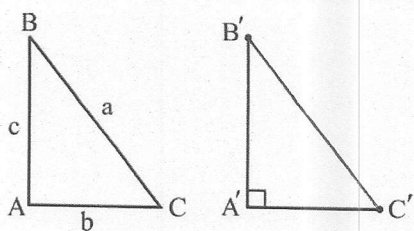
۶- در کتاب حل شود.

۷- در کتاب حل شود.





۸- با قضیه فیثاغورس آشنا هستید. این قضیه می‌گوید: اگر در مثلث ABC ، زاویه A قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
الف) عکس این قضیه را بنویسید.



اگر در مثلث ABC ، $a^2 = b^2 + c^2$ یا شد، آنگاه مثلث قائم الزامی است. $(\hat{A} = 90^\circ)$.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه‌های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB = c$ و $A'C' = AC = b$.

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه‌ی پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC = a$.

$$\triangle A'B'C': \frac{A'B'^2}{AB^2} + \frac{A'C'^2}{AC^2} = \frac{B'C'^2}{BC^2} \rightarrow \frac{c^2}{c^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{B'C'^2}{a^2} \rightarrow B'C' = a \rightarrow B'C' = BC = a$$

(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\begin{cases} A'B' = AB = c \\ A'C' = AC = b \\ B'C' = BC = a \end{cases} \xrightarrow{\text{م.م.م.}} \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC \xrightarrow{\text{م.م.م.}} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$$

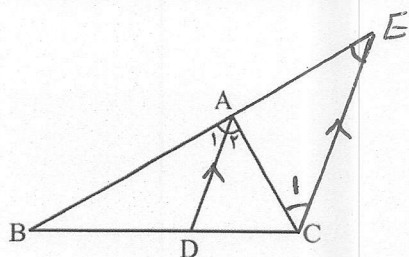
ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دوطرفه بیان نمایید.

یک مثلث قائم الزامی است، اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگتر، برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد.





* کاربردهای تشابه

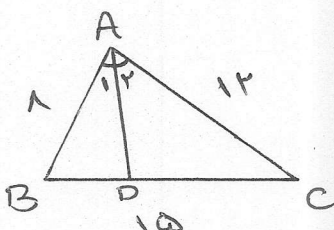


۱- قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی: در هر مثلث، نیمساز داخلی هر زاویه، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند:
پرهان: از C خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند:

$$AD \parallel CE \begin{cases} \text{مورب } BE \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ \text{مورب } AC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{C}_1 = \hat{E} \rightarrow AC = AE \quad (1)$$

$$\triangle BCE : AD \parallel CE \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

مثال: سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را بیابید.



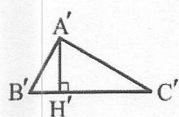
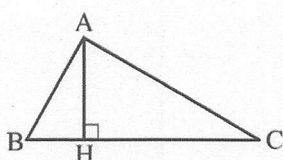
$$BD و CD = ?$$

نیمساز زاویه‌ی بزرگ‌تر، روی دو ضلع بزرگ‌تر یعنی AD را رسم می‌کنیم:

$$\text{نیمساز: } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{15-BD} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{BD}{15-BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3BD = 30 - 2BD \Rightarrow 5BD = 30 \Rightarrow BD = 6$$

$$BD + CD = 15 \Rightarrow 6 + CD = 15 \Rightarrow CD = 9$$

۲- نسبت ارتفاعها: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

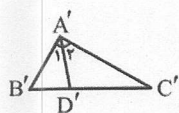
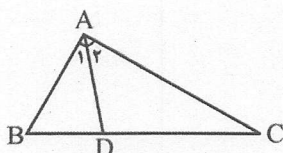


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{ح: } \frac{AH}{A'H'} = k$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز. ز.}} \triangle ACH \sim \triangle A'C'H' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CH}{C'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

۳- نسبت نیمسازها: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{ح: } \frac{AD}{A'D'} = k$$

$$\hat{A} = \hat{A}' \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad (1)$$

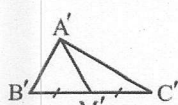
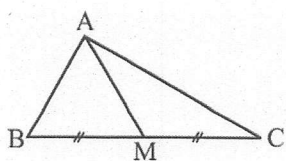
$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad (1) \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز. ز.}} \triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$$





۴- نسبت میانه‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.



ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\text{ع: } \frac{AM}{A'M'} = k$

طبق فرض: $\frac{BC}{B'C'} = k \rightarrow \frac{CM}{C'M'} = k$ ①

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CM}{C'M'} = k \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right. \xrightarrow[\text{و تساوی زاویه بین}]{\text{تناسب ضلع}} \triangle ACM \sim \triangle A'C'M' \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$

۵- نسبت محیط‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ع: $\frac{P}{P'} = k$

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \xrightarrow[\text{و تساوی تناسب}]{\text{نسبت محیط}} \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = k \Rightarrow \frac{P}{P'} = k$

۶- نسبت مساحت‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

ف: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

ع: $\frac{S}{S'} = k^2$

$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h}{\frac{1}{2} a' \cdot h'} = \left(\frac{a}{a'} \right) \times \left(\frac{h}{h'} \right) = k^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = k^2$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'} = \frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} = k$

نکته: روابط فوق را به صورت مقابل در یک رابطه جمع می‌کنیم:

نکته: روابطی که در بالا در مورد مثلث‌های متشابه مطرح شد را می‌توان در مورد هر دو چندضلعی متشابه نیز مطرح کرد.

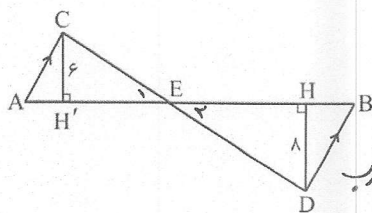
مثال: مثلث‌های ABC و A'B'C' متشابه‌اند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱ و محیط مثلث A'B'C' برابر ۶۰ باشد، طول

اضلاع مثلث A'B'C' را به دست آورید.

$\frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{5+8+11}{P'} \rightarrow \frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{24}{P'}$

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{a'} = \frac{24}{P'} \rightarrow a' = \frac{5P'}{24} \\ \frac{8}{b'} = \frac{24}{P'} \rightarrow b' = \frac{8P'}{24} = \frac{2P'}{3} \\ \frac{11}{c'} = \frac{24}{P'} \rightarrow c' = \frac{11P'}{24} \end{array} \right.$





مثال: در شکل مقابل، $AC \parallel BD$ و $AB = 35$ می باشد.

الف) نسبت $\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}$ را بیابید.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_2 \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زاویه مورب}} \triangle ACE \sim \triangle BDE \rightarrow k = \frac{CH'}{DH} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}} = k^2 \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۳۵-EB

$$\frac{AE}{EB} = k = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{35-EB}{EB} = \frac{1}{2} \rightarrow 140 - FEB = 2EB \rightarrow 4EB = 140 \rightarrow EB = 35$$

ب) با توجه به اندازه ها، S_{BDE} چقدر است؟

$$S_{BDE} = \frac{1}{2} DH \times EB = \frac{1}{2} \times 8 \times 35 = 140$$

تست: اندازه ی محیط های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ است. اگر مساحت مثلث کوچک تر ۵۰ باشد، مساحت مثلث بزرگ تر کدام است؟

$$\frac{P}{P'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} \rightarrow \frac{45}{25} = \sqrt{\frac{50}{S'}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{81}{125} = \frac{50}{S'} \rightarrow S' = 2 \times 81 = 162$$

- ۸۱ (۱)
- ۱۶۲ (۲✓)
- ۱۳۵ (۳)
- ۷۲ (۴)

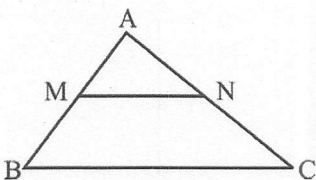
تعین (صفحه ۴۹ کتاب):

۱- طول ضلع های یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

$$\frac{10}{a} = \frac{P}{P'} \rightarrow \frac{10}{15} = \frac{P}{10+12+15} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{P}{37} \rightarrow P = \frac{74}{3}$$

بزرگ ترین ضلع مثلث اول

۲- در شکل مقابل $BC \parallel MN$ است و مساحت دوزنقه ی $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



$$BC \parallel MN \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMN \rightarrow k = \frac{AB}{AM} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = k^2 \xrightarrow{\text{تفاضل در صورت}} \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = \frac{k^2 - 1}{1}$$

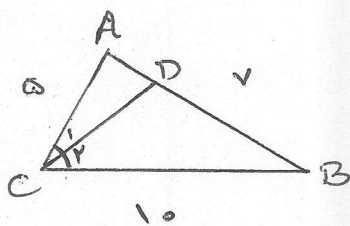
$$\frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = k^2 - 1 \rightarrow k^2 - 1 = 8 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = 3 \quad (2)$$

$$\text{تفاضل در صورت} \rightarrow \frac{AB-AM}{AM} = \frac{3-1}{1} \rightarrow \frac{BM}{AM} = 2$$





۳- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طولهای دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.

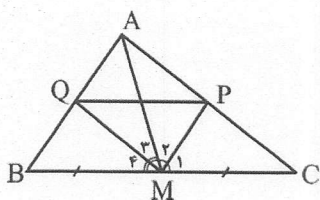


$$\text{نیمساز } CD \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CA}{CB} \rightarrow \frac{AD}{7-AD} = \frac{5}{10}$$

$$\rightarrow 2AD = 7 - AD \rightarrow 3AD = 7 \rightarrow AD = \frac{7}{3}$$

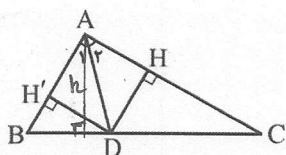
$$AD + BD = 7 \rightarrow \frac{7}{3} + BD = 7 \rightarrow BD = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

۴- در مثلث ABC شکل مقابل، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.



$$\begin{aligned} \triangle ABM: \text{نیمساز } MQ &\rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB} \\ \triangle ACM: \text{نیمساز } MP &\rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$



۵- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.

الف) با در نظر گرفتن BD و CD به عنوان قاعده، نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times BD}{\frac{1}{2}h \times CD} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad (1)$$

ب) نشان دهید: $DH = DH'$ و با استفاده از آن بار دیگر نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

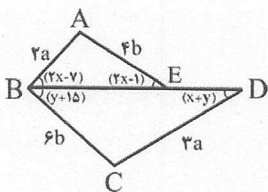
$\begin{cases} AD = AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر مشترک و وترهای زاویه حاده}} \triangle ADH \cong \triangle ADH' \xrightarrow{\text{اگر تقابلی}} DH = DH'$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AB}{\frac{1}{2}DH \times AC} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

ج) از مقایسه دو قسمت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ابوابی دیگر برای قضیه نیمسازها $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ و ۱ و ۲



۶- در شکل مقابل می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت مثلث ABE را بیابید.



$$\frac{BE}{DE} = 2 \xrightarrow{\text{ترکیب درخرج}} \frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2a}{2a} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AE}{BC} = \frac{2b}{2b} = \frac{2}{3}$$

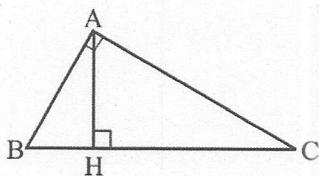
$$\begin{cases} 2x-1 = y+1 \\ 2x-1 = x+y \end{cases} \rightarrow x=9, y=2$$

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نسبت} \\ \text{ضلع} \end{array} \right\} \triangle ABE \sim \triangle BCD$$

نسبت زوایا مساوی و ضلع برابرند

۷- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\triangle ABH \sim \triangle ACH \sim \triangle ABC$ است. با توجه به این موضوع،



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

الف) ثابت کنید:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \quad (1)$$

$$\triangle ACH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = k'^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \quad (2)$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، قضیه فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$$(1) + (2) \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \rightarrow 1 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

$$\rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۸- در کتاب حل شود.

هندسه ۱

فصل ۳


پندضلعی ها

مدرس: سیدابوذر حسینی



* از «خم ساده» تا «چندضلعی»

در این قسمت، یک سری تعاریف برای رسیدن به تعریف چندضلعی ارائه می‌دهیم:




خم مسطح: مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

مثال: خم‌های  و  مسطح‌اند، ولی خم  مسطح نیست.

خم ساده: خم مسطحی است که خودش را قطع نمی‌کند، مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند.

مثال: خم‌های  و  ساده‌اند ولی خم  ساده نیست.

خم بسته: اگر نقاط انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم، بسته نامیده می‌شود. خم بسته می‌تواند ساده باشد یا نباشد.

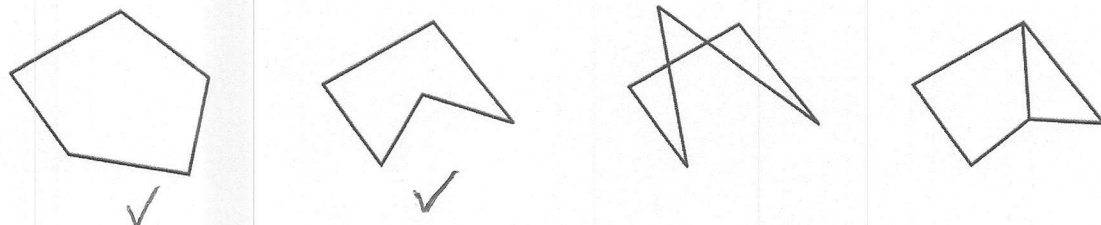
مثال: خم  ساده‌ی بسته است. خم  ساده است ولی بسته نیست. خم  بسته است ولی ساده نیست.

تعریف: چندضلعی، شکلی است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که:

(۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

(۲) هر دو پاره‌خط متوالی که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر چندضلعی است؟

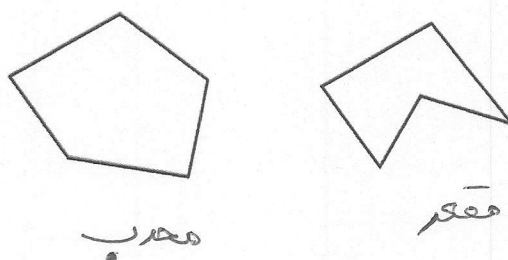


تعریف: چندضلعی را محدب گوئیم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن

خط واقع شوند. (به بیان ساده‌تر، زاویه‌ی بزرگ‌تر از 180° در چندضلعی وجود نداشته باشد).

- هر چندضلعی را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.

مثال: کدام یک از چندضلعی‌های زیر محدب و کدام یک مقعر است؟



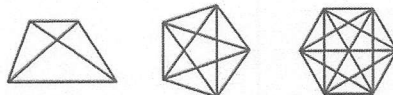


* قطر در چندضلعی ها

تعریف: در هر n ضلعی، هر پاره خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می نامیم.

از هر رأس یک n ضلعی محدب، قطر می توان رسم کرد (خود رأس و دو رأس کناری آن که با ضلع به هم متصل اند،

کم می شوند). لذا تعداد کل قطرهای هر n ضلعی محدب از رابطه ی $\frac{n(n-3)}{2}$ محاسبه می شود.



نکته: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه شود، به تعداد اقطار، $(n-1)$ قطر اضافه می شود.

یادآوری:

- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2) \times 180^\circ$ و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر 360° است.

- اگر n ضلعی، منتظم باشد، هر زاویه ی داخلی برابر $\frac{(n-2) \times 180}{n}$ درجه و هر زاویه ی خارجی برابر $\frac{360}{n}$ درجه است.

✓ تست: تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد اضلاع کدام است؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \rightarrow \frac{n-3}{2} = 3 \rightarrow n-3=6 \rightarrow n=9$$

۱۰ (۱) ۱۲ (۲)

۷ (۳) ۹ (۴) ✓

✓ تست: اگر مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب برابر 1080° باشد، از هر رأس آن چند قطر قابل رسم است؟

$$(n-2) \times 180 = 1080 \rightarrow n-2 = \frac{1080}{180} = 6 \rightarrow n=8$$

۶ (۱) ۷ (۲)

۸ (۳) ۵ (۴) ✓

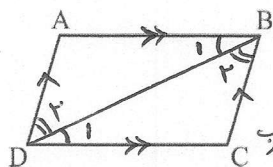
از هر رأس $n-3$ قطر یعنی $8-3=5$ قطر می گذرد



* چهارضلعی ها

۱- متوازی الاضلاع

تعریف: متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه روی آن دوبه دو موازی اند.

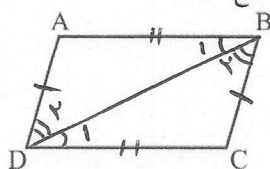


قضیه ۱: در هر متوازی الاضلاع، اضلاع روبه رو با هم برابرند. $\begin{cases} AB=DC \\ AD=BC \end{cases}$ پرهان: قطر BD را رسم می کنیم:

ف: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} \angle ABD = \angle BDC \\ \angle ADB = \angle CBD \end{cases}$

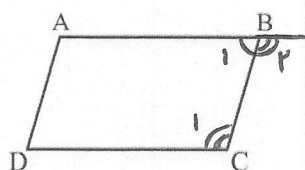
پرهان: $\begin{cases} \angle ABD = \angle BDC \\ \angle ADB = \angle CBD \\ BD = BD \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle ABD \cong \triangle BDC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه رو با هم برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.



عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه رو با هم برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.

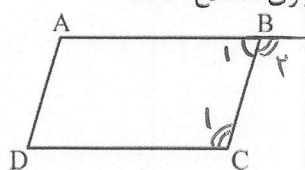
ف: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle ABD \cong \triangle BDC \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

قضیه ۲: در هر متوازی الاضلاع، زوایای مجاور مکمل اند. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$ 

ف: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} \angle A + \angle B = 180 \\ \angle B + \angle C = 180 \end{cases}$

هاتقی حسابی ها نیز به همین ترتیب ثابت می شوند.

عکس قضیه ۲: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه ی مجاور مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.

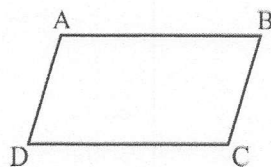


ف: $\begin{cases} \angle A + \angle B = 180 \\ \angle B + \angle C = 180 \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \parallel BC$ ع: $\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{cases}$

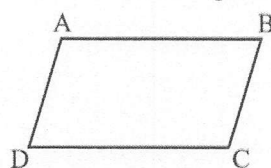
قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، زوایای مقابل برابرند.

از هم نهشتی قضیه ۱ داریم:



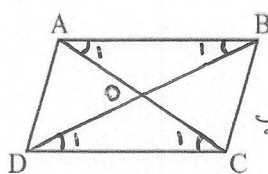
ف: $\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه ی مقابل برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.



ف: $\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی}} \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \parallel BC$

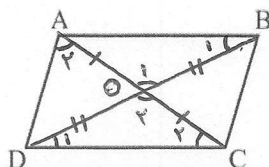


$$ح: \begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$$

قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{موازی}} \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB=CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض. ز.}} \triangle AOB \cong \triangle COD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases} \\ & \text{" " } \xrightarrow{\text{موازی}} \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

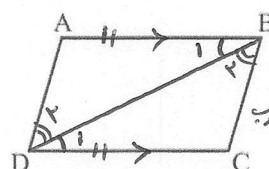
عکس قضیه ۴: اگر در یک چهارضلعی، قطرهای منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



$$\begin{cases} OA=OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB=OD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض. ز.}} \triangle AOB \cong \triangle COD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} B_1 = D_1 \xrightarrow{\text{۲۲'۵'ع}} AB \parallel DC$$

$$\xrightarrow{\text{۲۲'۵'ع}} AD \parallel BC \quad \text{ب. همین ترتیب} \quad \triangle AOD \cong \triangle BOC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \rightarrow AD \parallel BC$$

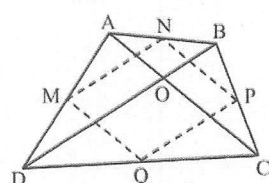
مثال: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، متوازی‌الاضلاع است.



$$ف: AB \parallel CD \quad \text{موازی‌الاضلاع} \quad ABCD \rightarrow AD \parallel BC \quad \text{ح:}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{موازی}} \begin{cases} AB=CD \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض. ز.}} \triangle ABD \cong \triangle BCD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow{\text{۲۲'۵'ع}} \\ & \rightarrow AD \parallel BC \rightarrow \text{موازی‌الاضلاع} \quad ABCD \end{aligned}$$

مثال: (الف) ثابت کنید اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



$$ABCD \text{ موازی‌الاضلاع: } ح: AN=NB, BP=PC, CQ=QD, AM=MD \quad \text{پرهان: قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم}$$

$$\triangle ABD: \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MD} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BD \rightarrow MN \parallel PQ$$

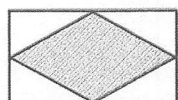
$$\triangle BCD: \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QD} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BD \rightarrow MN \parallel PQ$$

$$\triangle ABC: \frac{BN}{NA} = \frac{BP}{PC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NP \parallel AC \rightarrow NP \parallel MQ$$

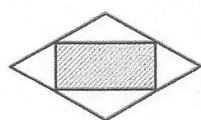
$$\triangle ADC: \frac{CQ}{QD} = \frac{CP}{PA} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MQ \parallel AC \rightarrow NP \parallel MQ$$

(ب) رابطه‌ای برای محیط متوازی‌الاضلاع به دست آورید.

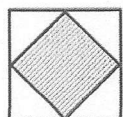
$$\begin{cases} MN=PQ=\frac{1}{2}BD \\ NP=MQ=\frac{1}{2}AC \end{cases} \rightarrow P_{MNPQ} = AC+BD$$



(پ) اگر شکل اولیه مستطیل یا دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، شکل حاصل چیست؟ لوزی - چون مستطیل دو قطر باهم برابرند، لذا هر چهارضلع متوازی‌الاضلاع حاصل باهم برابر می‌شوند.



(ت) اگر شکل اولیه لوزی باشد، شکل حاصل چیست؟ مستطیل - زاویه متوازی‌الاضلاع همان زاویه بین دو قطر است چون در لوزی دو قطر پرهم عمودند، لذا متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود.



(ث) اگر شکل اولیه مربع باشد، شکل حاصل چیست؟ مربع - ترکیب دو حالت (پ) و (ت)

۲- مستطیل

تعریف: مستطیل، متوازی الاضلاعی است که یک زاویه ی 90° درجه دارد.

قضیه ۵: در هر مستطیل، دو قطر با هم برابر و منصف یکدیگرند.

قضیه ۶: متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است. $ABCD$ مستطیل: C

$ABCD$ متوازی الاضلاع: F

$$\begin{cases} DC = DC \\ AD = BC \\ AC = BD \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(ض. ض. ض.)} \triangle ADC \cong \triangle BDC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{D} = \hat{C} \xrightarrow{D+C=180^\circ} \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$$

$\leftarrow ABCD$ مستطیل

ویژگی های مهمی در مثلث قائم الزاویه

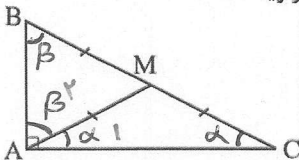
قضیه ۷: در هر مثلث قائم الزاویه، میانه ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

برهان: میانه AM را به اندازه خود تا D امتداد داده و از D به B و C وصل می کنیم:

$$\begin{cases} AM = DM \\ BM = CM \end{cases} \rightarrow \triangle BMC \cong \triangle DMA \xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}} \triangle BMC \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \triangle BMC \text{ مستطیل}$$

$$\rightarrow \underbrace{AD = BC}_{2AM} \Rightarrow 2AM = BC \rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

عکس قضیه ۷: اگر در مثلثی، میانه ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است.



$$\begin{cases} \hat{C} = \alpha \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha \\ \hat{B} = \beta \xrightarrow{MA=MB} \hat{A}_2 = \hat{B} = \beta \end{cases} \text{ قدری مهم}$$

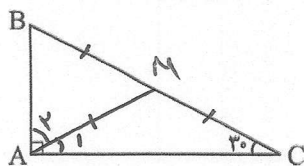
$$\triangle ABC: \underbrace{\hat{A}}_{\alpha+\beta} + \underbrace{\hat{B}}_{\beta} + \underbrace{\hat{C}}_{\alpha} = 180^\circ \rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\rightarrow \hat{A} = \alpha + \beta = 90^\circ$$



قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه 30° درجه باشد، آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° درجه نصف وتر است.



پرهان: میان AM را رسم می‌کنیم: $AB = \frac{BC}{2}$ $\hat{C} = 30^\circ$ $\hat{A} = 90^\circ$

$$\hat{C} = 30^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM: \begin{cases} \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{A}_2 = 60^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{M} = 60^\circ \rightarrow \triangle ABM \text{ متساوی‌الاضلاع}$$

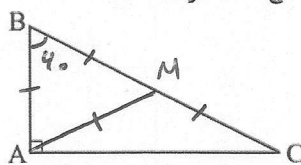
$$\rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$$

نکته: در قضیه‌ی فوق ضلع مجاور زاویه‌ی 30° درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

$$\frac{AB^2}{(\frac{BC}{2})^2} + AC^2 = BC^2 \rightarrow \frac{BC^2}{4} + AC^2 = BC^2 \rightarrow AC^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{3BC^2}{4}$$

$$\rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

عکس قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک ضلع نصف وتر باشد، آنگاه زاویه‌ی روبه‌رو به این ضلع 30° درجه است.



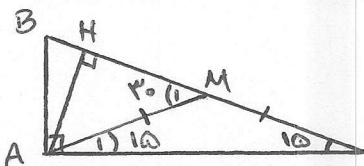
$$AB = \frac{BC}{2} \quad \hat{C} = 30^\circ$$

پرهان: میان AM را رسم می‌کنیم:

$$AB = AM = BM = \frac{BC}{2} \rightarrow \triangle ABM \text{ متساوی‌الاضلاع} \rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

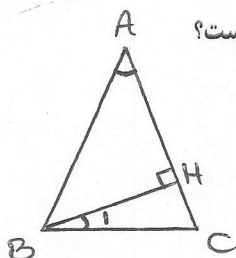
مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{C} = 15^\circ, \hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. اگر $BC = 4$ باشد، طول HM را بیابید.



$$\hat{C} = 15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = 15^\circ$$

$$\triangle AMC \text{ زاویه خارجی } \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$$

$$\rightarrow \triangle AHM: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = 30^\circ \end{cases} \rightarrow HM = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{AM}{\frac{BC}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{2} = \sqrt{3}$$



تست: در مثلث متساوی‌الساقینی، ارتفاع وارد بر ساق، نصف ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده کدام است؟

$$\text{ف: } \begin{cases} AB = AC \\ BH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB \end{cases} \quad \text{ع: } \hat{B}_1 = ?$$

$$\triangle ABH: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ BH = \frac{AB}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس قضیه ۸}} \hat{A} = 30^\circ \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$$

$$\rightarrow \triangle BCH: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{C} = 75^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}_1 = 15^\circ$$

۱۷) 15°

۱۸) 30°

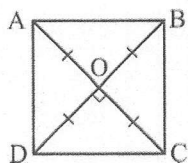
۱۹) 45°

۲۰) 60°





۳- مربع

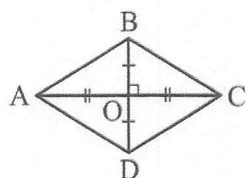


تعریف: مربع، مستطیلی است که طول و عرض برابر دارد. (یا مستطیلی است که قطرهاش

بر هم عمودند)

قضیه ۹: قطرهای مربع، نیمساز زوایای مربع می‌باشند و مربع را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنند.

۴- لوزی

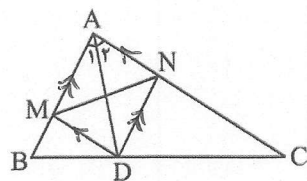


تعریف: لوزی، متوازی‌الاضلاع است که طول و عرض برابر دارد.

قضیه ۱۰: در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند و برعکس.

قضیه ۱۱: در لوزی قطرهای نیمساز زوایای لوزی می‌باشند و برعکس.

مثال: در مثلث ABC، از نقطه D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در M و N قطع کند. AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟



$$\begin{cases} DM \parallel AN \\ DN \parallel AM \end{cases}$$

→ AMDN متوازی‌الاضلاع

(۱) فقط عمود بر هم

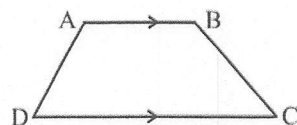
(۲) فقط منصف هم

(۳) زاویه‌ی بین آن‌ها مکمل زاویه‌ی A
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow$ AMDN لوزی
 قطر نیمساز است

(۴) عمود منصف هم

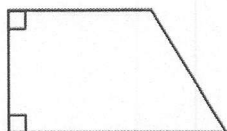
۵- دوزنقه

تعریف: دوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی‌اند.



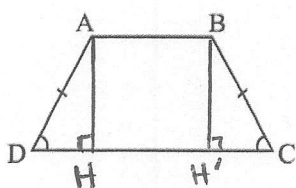
$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$$

ضلع‌های غیر موازی AD و BC ساق‌های دوزنقه و AB و CD قاعده‌های دوزنقه نامیده می‌شوند.



نکته: هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً

بر دیگری نیز عمود است و در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامیم.



نکته: اگر $AD = BC$ باشد، دوزنقه، متساوی الساقین نامیده می شود.

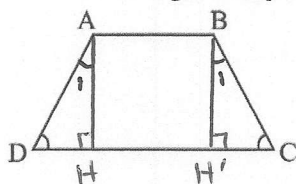
قضیه ۱۲: در هر دوزنقه‌ی متساوی الساقین، زاویه‌های مجاور به یک قاعده برابرند.

$$\text{ف: } AD = BC \quad \text{ح: } \hat{C} = \hat{D}$$

$$\begin{cases} AD = BC \\ AH = BH' \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} \hat{C} = \hat{D}$$

خاصله دو خط موازی همواره برابر

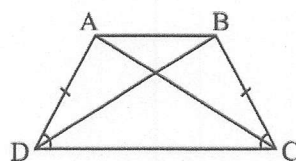
عکس قضیه ۱۲: اگر در یک دوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده برابر باشند، آنگاه دوزنقه متساوی الساقین است.



$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع زوایا ۱۸۰}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\triangle ADH \text{ و } \triangle BCH' : \begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع زوایا ۱۸۰}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AH = BH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{قضی (ض/ض)}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} AD = BC$$



قضیه ۱۳: در هر دوزنقه‌ی متساوی الساقین، اقطار با یکدیگر برابرند و برعکس.

$$\text{ف: } AD = BC \quad \text{ح: } AC = BD$$

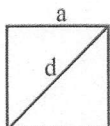
$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \\ DC = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{قضی (ض/ض)}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \xrightarrow{\text{اجزای تقبی}} AC = BD$$



* مساحت و کاربردهای آن

- یادآوری:

(- مربع)



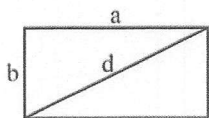
$$\begin{cases} S = a^2 \rightarrow \text{یک ضلع به توان ۲} \\ P = 4a \\ d = a\sqrt{2} \end{cases}$$

مثال: مساحت یک مربع با محیط آن برابر است. طول قطر مربع را بیابید.

$$S = P \rightarrow a^2 = 4a \rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۲- مستطیل



$$\begin{cases} S = ab \rightarrow \text{طول} \times \text{عرض} \\ P = 2(a + b) \\ d = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

تست: مستطیلی به طول ۴ و عرض b مفروض است. اگر نسبت قطر مستطیل به مساحت آن برابر $\frac{5}{12}$ باشد، b کدام است؟

$$\frac{d}{S} = \frac{\sqrt{4^2 + b^2}}{4b} = \frac{5}{12} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{16 + b^2}{b^2} = \frac{25}{9} \rightarrow 9 \times 16 + 9b^2 = 25b^2$$

$$\rightarrow 9 \times 16 = 25b^2 - 9b^2 = 16b^2 \rightarrow b = 3$$

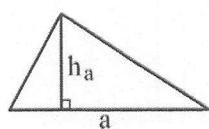
۲ (۱)

۳ (۲✓)

۴ (۳)

۵ (۴)

۳- مثلث

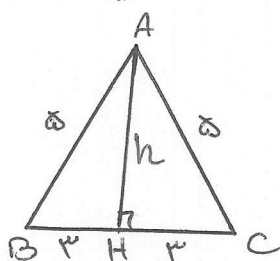


$$\begin{cases} S = \frac{a \times h_a}{2} \rightarrow \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول سه ضلع} \end{cases}$$

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC، AB=AC=۵ و BC=۶ است. مساحت مثلث را بیابید.

$$\triangle ABH: 3^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow h = 4$$

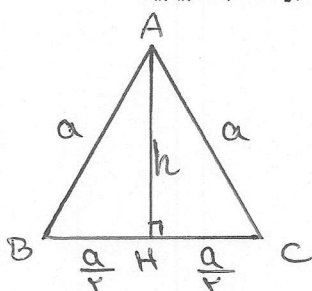
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$



مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر a باشد، فرمولی برای ارتفاع و مساحت مثلث بر حسب a بیابید.

$$\triangle ABH: h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

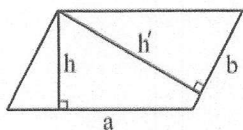
$$\rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



$$S = \frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times a \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

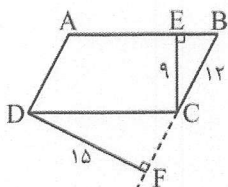


۴- متوازی الاضلاع



$$\begin{cases} S = a \times h = b \times h' \rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \\ P = 2(a + b) \end{cases}$$

تست: در شکل مقابل، ABCD متوازی الاضلاع است. با توجه به اندازه‌ها، طول AB کدام است؟



$$S = AB \times \frac{CE}{a} = \frac{DF}{15} \times \frac{BC}{12} \rightarrow AB = \frac{15 \times 12}{9}$$

۱۵ (۱)

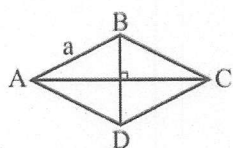
۱۸ (۲)

۲۰ (۳) ✓

۲۱ (۴)

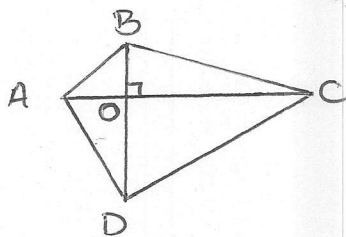
$$\rightarrow AB = 20$$

۵- لوزی



$$\begin{cases} S = \frac{AC \times BD}{2} \rightarrow \text{نصف حاصل ضرب دو قطر} \\ P = 4a \end{cases}$$

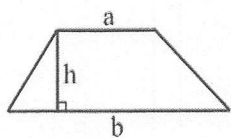
مثال: در چهارضلعی ABCD، دو قطر AC و BD بر هم عمودند. ثابت کنید: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \times BO + \frac{1}{2} AC \times DO$$

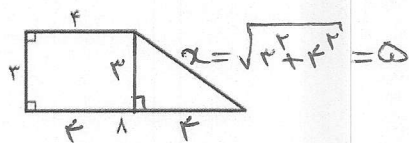
$$= \frac{1}{2} AC (BO + DO) \rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$$

۶- ذوزنقه



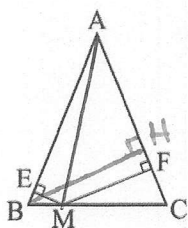
$$\begin{cases} S = \frac{(a+b) \times h}{2} \rightarrow \text{نصف مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول چهار ضلع} \end{cases}$$

تست: مساحت شکل مقابل، چند برابر محیط آن است؟



$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(4+1) \times 3}{3+3+5+1} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

 $\frac{10}{9}$ (۱) $\frac{9}{10}$ (۲) ✓ $\frac{23}{18}$ (۳) $\frac{18}{23}$ (۴)



مثال مهم: در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB = AC$ است، از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی BC دو عمود

ME و MF را بر دو ساق رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $ME + MF = BH$

پرهان: از M به A وصل می‌کنیم:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM}$$

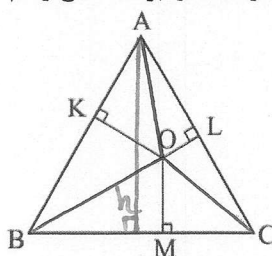
$$\rightarrow \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} ME \times \frac{AB}{AC} + \frac{1}{2} MF \times AC$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} BH \times AC = \cancel{\frac{1}{2}} AC (ME + MF) \rightarrow ME + MF = BH$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع است.

مثال مهم: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a، از نقطه‌ی دلخواه O درون مثلث سه عمود OK، OL و OM را بر سه ضلع رسم

می‌کنیم. نشان دهید: $OK + OL + OM = h$
پرهان: از O به A و B و C وصل می‌کنیم:



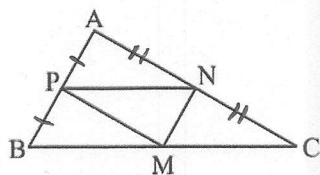
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} a \times h = \frac{1}{2} a \times OK + \frac{1}{2} a \times OL + \frac{1}{2} a \times OM$$

$$\rightarrow h = OK + OL + OM$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الاضلاع، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع است.

مثال: M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BMP \cong \triangle CMN$



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PN \parallel BC$$

$$PM \parallel AC \quad \text{به همین ترتیب}$$

$$\rightarrow \text{متوازی الاضلاع } PNCM$$

$$\xrightarrow[\text{متوازی الاضلاع}]{\text{قطر MN}} \triangle PMN \cong \triangle CMN$$

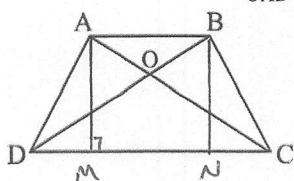
$$\left. \begin{array}{l} \triangle APMN \rightarrow \triangle PMN \cong \triangle APN \\ \triangle BMNP \rightarrow \triangle PMN \cong \triangle BMP \end{array} \right\} \rightarrow \triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BMP \cong \triangle CMN$$

نتیجه: اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌بزرگ می‌سازیم و در نتیجه هم‌مساحت به وجود می‌آید.





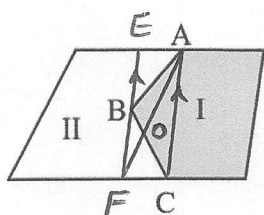
مثال (قضیه شبه پروانه): در دوزنقه‌ی ABCD، دو قطر AC و BD در O متقاطع‌اند. ثابت کنید: $S_{OAD} = S_{OBC}$



$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \times AM \quad \xrightarrow{AM=BN} S_{ADC} = S_{BDC}$$

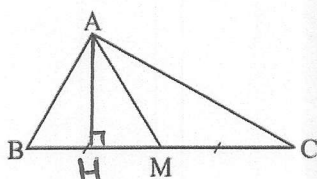
$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DC \times BN$$

$$\rightarrow S_{AOD} + S_{DOC} = S_{BOC} + S_{DOC} \rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$$



کاربردی از مثال قبل: در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین زمین‌های خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آن‌ها تغییر نکند. چگونه باید این کار را انجام دهند؟

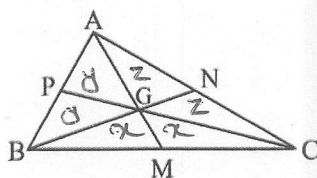
از A به C وصل کرده و از B به موازات AC رسم می‌کنیم تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. حال اگر از A به F وصل کنیم، AF می‌تواند مرز جدید باشد (EC نیز می‌تواند باشد)، زیرا طبق قضیه شبه پروانه $S_{AOB} = S_{COF}$ است.



مثال مهم: الف) نشان دهید در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.
 $BM = CM$ $\therefore S_{ABM} = S_{ACM}$

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AH \times BM \quad \xrightarrow{BM=CM} S_{ABM} = S_{ACM}$$

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AH \times CM$$



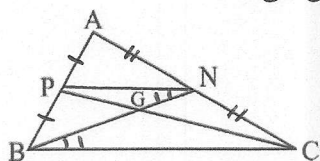
ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید سه میانه‌ی مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

$$\begin{aligned} \triangle GBC: & \text{ میانه } GM \rightarrow S_{GBM} = S_{GCM} = x \\ \triangle GAB: & \text{ میانه } GP \rightarrow S_{GAP} = S_{GBP} = y \\ \triangle GAC: & \text{ میانه } GN \rightarrow S_{GAN} = S_{GCN} = z \end{aligned}$$

$$\triangle ABC: \begin{cases} \text{میانه } AM \rightarrow 2y + x = 2z + x \rightarrow y = z \\ \text{میانه } BN \rightarrow 2y + z = 2x + z \rightarrow y = x \end{cases} \rightarrow x = y = z$$



قضیه مهم: سه میانه هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه‌ی هم‌رسی، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.
پرهان: از P به N وصل می‌کنیم:



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس‌السن}} PN \parallel BC \xrightarrow{\text{عکس‌السن}}$$

$$\frac{PN}{BC} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{G}_1 = \hat{G}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{موتری مورب}} \triangle PNG \sim \triangle GBC \xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}$$

$$\frac{GN}{GB} = \frac{GP}{GC} = \left(\frac{PN}{BC}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مکوس}} \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GP} = \frac{2}{1}$$

چون دو میانه‌ی BN و CP دلخواه بودند، پس این رابطه در مورد هر دو میانه‌ی دیگر نیز برقرار است، در نتیجه هر ۳ میانه‌ی مثلث هم‌رس‌اند.

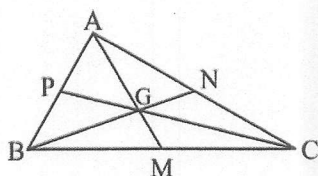
نتیجه: میانه‌های هر مثلث هم‌رس‌اند.

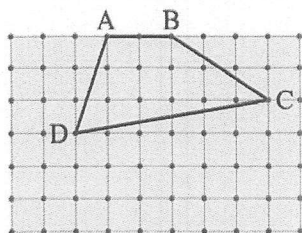
نکته ۱: محل هم‌رسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

نکته ۲: محل هم‌رسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود.

نکته ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$





* نقاط شبکه‌ای و مساحت

در شکل مقابل، نقاطی عمودی و افقی در کنار هم وجود دارند به طوری که فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی روی یک خط عمودی (یا افقی) از هم برابر یک واحد است. به این نقاط، نقاط شبکه‌ای و به چندضلعی ABCD، یک چندضلعی شبکه‌ای می‌گوییم.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای می‌نامیم.

به طور مثال چهارضلعی ABCD دارای ۵ نقطه‌ی مرزی و ۹ نقطه‌ی درونی شبکه‌ای است.

فرمول پیک: اگر تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان دهیم، مساحت چندضلعی

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

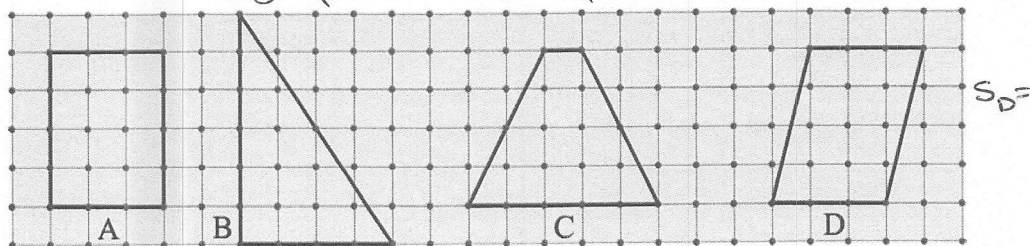
شبکه‌ای برابر است با:

به کمک فرمول پیک می‌توان مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را به طور تقریبی محاسبه کرد.

مثال: در شکل‌های زیر، مساحت چندضلعی‌های داده شده را ابتدا به روش معمول محاسبه کنید. سپس با تعیین نقاط مرزی و درونی، جدول

زیر را تکمیل و درستی فرمول پیک را تحقیق کنید. $S_B = \frac{4 \times 4}{2} = 12$ $S_C = \frac{(1+5) \times 4}{2} = 12$

$$S_A = 3 \times 4 = 12$$



چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	$\frac{14}{2} - 1 + 6 = 12$	$\frac{12}{2} - 1 + 7 = 12$	$\frac{10}{2} - 1 + 8 = 12$	$\frac{8}{2} - 1 + 9 = 12$

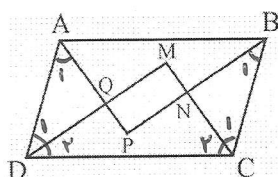
C خلاصه نویسی:

C سوالات تشریحی:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلعها برابر است؟ (تمرین ۱ صفحه ۶۳)

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \rightarrow \frac{n-3}{2} = 1 \rightarrow n-3=2 \rightarrow n=5$$

۲- ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی الاضلاع، یک مستطیل پدید می آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)



$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{Q} = 90^\circ$$

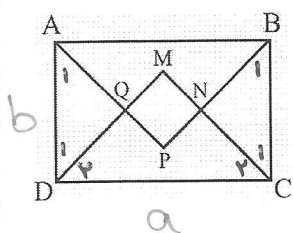
$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{N} = 90^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{M} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{P} = 90^\circ$$

← MNPQ مستطیل است.

۳- الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مربع پدید می آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)
هائند سوال قبل ۹۰ درجه بودن چهار زاویه ی MNPQ را به راحتی می توان ثابت کرد:



$$\hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{Q} = 90^\circ$$

$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{N} = 90^\circ$$

$$\hat{C}_2 = \hat{D}_2 = 45^\circ \rightarrow \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ \rightarrow \text{تایید MNPQ مستطیل است}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ \\ AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{از (۱)}} \triangle AQD \cong \triangle BNC \xrightarrow{\text{اجزای متضاد}} QD = NC \quad (1)$$

$$\hat{C}_2 = \hat{D}_2 = 45^\circ \rightarrow \triangle DMC: MD = MC \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \underbrace{MD - QD}_{MQ} = \underbrace{MC - NC}_{MN} \rightarrow MQ = MN \rightarrow \text{مربع MNPQ است}$$

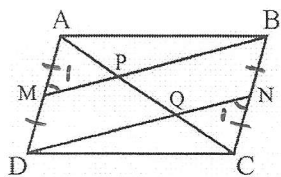
(ب) اگر طول و عرض مستطیل برابر a و b باشند، اندازه ی ضلع مربع را بر حسب a و b بیابید. (تمرین ۴ صفحه ۶۴)

$$\triangle DMC: MD^2 + MC^2 = a^2 \rightarrow 2MD^2 = a^2 \rightarrow MD^2 = \frac{a^2}{2} \rightarrow MD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle AQD: AQ^2 + QD^2 = b^2 \rightarrow 2QD^2 = b^2 \rightarrow QD^2 = \frac{b^2}{2} \rightarrow QD = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\dots \dots \dots MD = MD - QD = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \rightarrow MD = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

۴- در متوازی الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسطهای اضلاع AD و BC می باشند، (تمرین ۷ صفحه ۶۴)



الف) ثابت کنید MB موازی DN است.

$$AD = BC \rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \rightarrow AM = CN$$

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle A = \angle C \\ AM = CN \end{cases} \xrightarrow{\text{ض. زغنی}} \triangle ABM \cong \triangle CDN \xrightarrow{\text{اجزاء تقابلی}} \angle M_1 = \angle N_1$$

$\angle M_1 = \angle N_1 \rightarrow MB \parallel DN$ (زاویه متقابل)

ب) ثابت کنید: $AP = PQ = QC$

$$\triangle ADQ : MP \parallel DQ \xrightarrow{\text{خط موازی}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \rightarrow AP = PQ$$

$$\triangle CBP : QN \parallel PB \xrightarrow{\text{خط موازی}} \frac{CN}{NB} = \frac{CQ}{QP} \rightarrow CQ = QP$$

$\Rightarrow AP = PQ = QC$

ج سوالات تستی:

۱- در کدام چندضلعی، تعداد قطرهای سه واحد بیشتر از تعداد ضلعها است؟

(۱) ۵ ضلعی (۲) ۶ ضلعی ✓

(۳) ۸ ضلعی (۴) ۱۰ ضلعی

۲- شکل حاصل از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک، یک است.

(۱) دوزنقه - لوزی (۲) لوزی - مستطیل ✓ (۳) مستطیل - مربع (۴) مربع - لوزی

۳- شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی، یک است.

(۱) متوازی الاضلاع - مربع (۲) لوزی - مربع (۳) مربع - مستطیل (۴) مستطیل - مربع ✓

۴- از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶، یک مربع پدید می آید که مساحتش برابر است با:

$$x = \frac{a-b}{\sqrt{2}} = \frac{16-12}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) ۸ ✓ (۴) $8\sqrt{2}$

$$S = x^2 = \frac{16}{2} = 8$$

۵- در یک دوزنقه ای متساوی الساقین به قاعده های ۴ و ۱۲، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. اوساط اضلاع را به هم وصل می کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

(۱) $4\sqrt{5}$

(۲) $8\sqrt{5}$ ✓

(۳) $4\sqrt{10}$

(۴) $8\sqrt{10}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث قائم الزاویه، اگر یک زاویه ۱۵ درجه باشد، آنگاه ثابت کنید ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است. (تمرین ۶ صفحه ۶۴)

برهان: میانم وارد بر وتر AM را رسم می‌کنیم:

$C: AH = \frac{1}{4} BC$

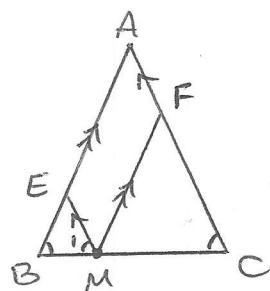
$\hat{C} = 15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1 = \hat{C} = 15^\circ$

ΔAMC زاویه خارجی $\hat{M} = \hat{A}_1 + \hat{C} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$

$\Delta AHM: \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{M} = 30^\circ \end{cases} \rightarrow AH = \frac{1}{2} AM \xrightarrow{AM = \frac{1}{2} BC} AH = \frac{1}{4} BC$

۲- از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$)، دو خط به موازات دو ساق رسم می‌کنیم تا

آنها را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $ME+MF=AB=AC$



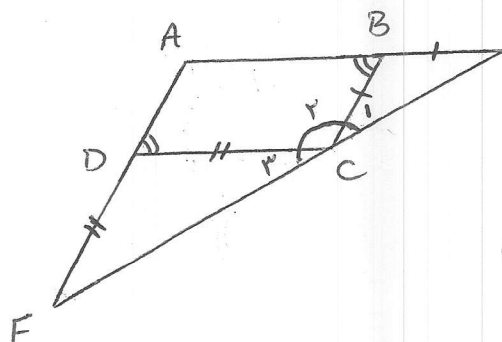
$\begin{cases} AF \parallel ME \\ AE \parallel MF \end{cases} \rightarrow AEMF \text{ متوازی الاضلاع} \rightarrow MF = AE \quad (1)$

$AB=AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \rightarrow \hat{B} = \hat{M}_1 \rightarrow ME = EB \quad (2)$

$EM \parallel AC \text{ و } BC \text{ قاطع} \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{C}$

$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow ME + MF = \underbrace{AE + EB}_{AB}$

۳- در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، روی امتداد AB به اندازه‌ی $BE=BC$ و روی امتداد AD به اندازه‌ی $DF=DC$ جدا می‌کنیم. ثابت کنید نقاط E, C و F بر یک امتدادند.



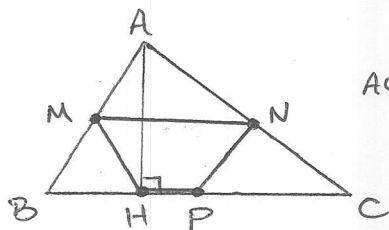
$\Delta BCE: BC=BE \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \rightarrow \hat{B} = 2\hat{C}_1 \rightarrow \hat{C}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$

$\Delta CDE: DF=DC \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{F} \rightarrow \hat{D} = 2\hat{C}_2 \rightarrow \hat{C}_2 = \frac{\hat{D}}{2}$

$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}_3 + \frac{\hat{D}}{2} = \hat{D} + \hat{C}_3 = 180^\circ$

$B=D$ و F و C و E بر یک امتدادند.

۴- در یک مثلث غیرمستوی، وسطهای سه ضلع و پای یک ارتفاع را به هم وصل کرده ایم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل دوزنقه‌ی متساوی الساقین است.



AC, AB وسطها $M, N \rightarrow MN \parallel HP \rightarrow$

میان خط دوزنقه

$NP \parallel \perp AB$ میان خط

$\Delta ABH: HM = \frac{1}{2} AB$
میان وارد پروتر

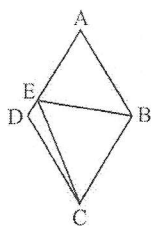
$NP = HM \rightarrow$ دوزنقه متساوی الساقین

۳- سوالات تستی:

۱- کدام یک از تعاریف زیر، تعریف لوزی است؟

۱✓ (۱) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم برابرند. (۲) چهارضلعی که اقطارش بر هم عمودند.

(۳) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند. (۴) مربعی که اقطارش بر هم عمودند.



۲- در لوزی ABCD شکل مقابل، $AB = BE$ می باشد. اگر $\hat{BEC} = 55^\circ$ باشد، زاویه ی DEC چند درجه است؟

۵۵ (۲✓) ۳۵ (۱)

۶۰ (۴) ۴۵ (۳)

۳- در یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین، قاعده‌ی کوچک برابر هر ساق و قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی دوزنقه چقدر است؟

۶۰° (۲✓) ۷۵° (۱)

۷۲° (۴) ۴۵° (۳)

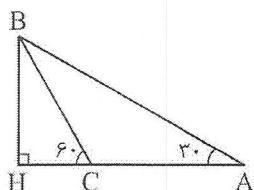
۴- در شکل مقابل، اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد، طول AH چند متر است؟

۷۵ (۱✓)

۸۰ (۲)

۸۵ (۳)

۹۰ (۴)



۵- در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده و از H به نقاط E و F اواسط اضلاع AB و AC وصل می کنیم. زاویه‌ی EHF برابر است با:

۷۵° (۱)

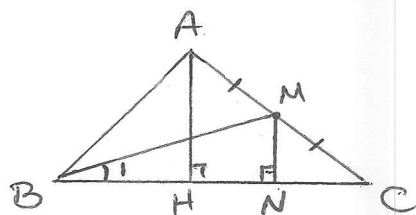
۸۰° (۲)

۹۰° (۳✓)

۱۰۰° (۴)

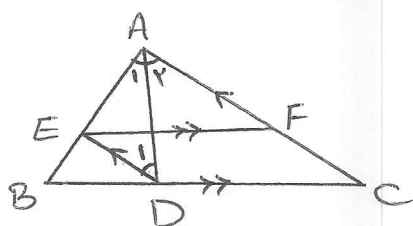
سؤالات تشریحی:

- ۱- در مثلث ABC، ارتفاع AH با میانه‌ی BM برابر است. اندازه‌ی زاویه‌ی CBM را بیابید. (راهنمایی: از M بر BC عمود کنید) $\hat{A}H = BM$ ؟ $\hat{B}_1 = ?$ ؟



$$\begin{aligned} MN \perp BC, AH \perp BC &\Rightarrow MN \parallel AH \xrightarrow{\text{میان خط}} \frac{MN}{AH} = \left(\frac{CM}{CA}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AH \\ AH = BM &\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BM \rightarrow \triangle BMN : \hat{B}_1 = 30^\circ \end{aligned}$$

- ۲- نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و از نقطه‌ی D خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. سپس از E خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید: $AE = FC$



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \begin{cases} DE \parallel AC \\ EF \parallel BC \end{cases}$$

$$EF \parallel DC \xrightarrow{\text{موازی الاضلاع}} EFCD \rightarrow FC = ED \quad (1)$$

$$ED \parallel AF, AD \text{ مشترک} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \rightarrow AE = ED \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AE = FC$$

سؤالات تستی:

- ۱- مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای رسم شده از هر رأس یک n ضلعی، کدام است؟

(۴) $n-3$

(۳) n

(۲) $n-1$ ✓

(۱) $n-2$

- ۲- اگر در یک n ضلعی، نسبت تعداد اقطار به تعداد اضلاع ۱۰ باشد، تعداد رئوس این چندضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 10 \rightarrow \frac{n-3}{2} = 10 \rightarrow n = 23$$

(۲) ۲۱

(۱) ۲۰

(۴) ۲۳ ✓

(۳) ۲۲

- ۳- قطرهای کدام چهارضلعی منصف یکدیگر نمی‌باشند؟

(۴) ✓ دوزنقه

(۳) مربع

(۲) مستطیل

(۱) متوازی‌الاضلاع

- ۴- کدام یک از تعاریف زیر، تعریف مربع نیست؟

(۲) لوزی که قطرهايش برابرند.

(۱) مستطیلی که دو ضلع مجاورش برابرند.

۵- در چهارضلعی ABCD داریم: $AB \parallel CD$ و $AD = BC = CD$. اگر زاویه $\hat{BAC} = 30^\circ$ باشد، اندازهی زاویهی \hat{CAD} چقدر است؟

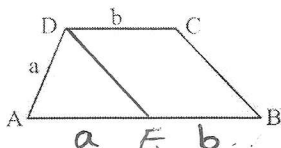
(۱) 20°

(۲) 30° ✓

(۳) 40°

(۴) 15°

۶- در ذوزنقهی ABCD شکل مقابل داریم: $\hat{D} = 2\hat{B}$ ، با توجه به اندازه‌ها، طول AB کدام است؟



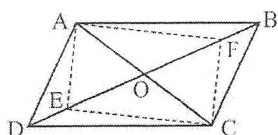
(۱) $a + b$ ✓

(۲) $2(a + b)$

(۳) $b - a$

(۴) $2(b - a)$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل، نقاط E و F را روی قطر BD طوری انتخاب می‌کنیم که $OE = OF = AO$ باشد.



نوع چهارضلعی AECF کدام است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) ذوزنقه

(۳) مربع

(۴) مستطیل ✓

۸- از برخورد نیمسازهای داخلی شکل A، شکل B و از برخورد نیمسازهای داخلی شکل B، یک مربع ایجاد شده است. شکل A کدام بوده است؟

(۱) مستطیل

(۲) مربع

(۳) لوزی

(۴) متوازی‌الاضلاع ✓

۹- اگر a و b اضلاع یک مستطیل باشند، آنگاه مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل کدام است؟

(۱) $\frac{a^2 + b^2}{2}$

(۲) $\frac{a^2 - b^2}{2}$

(۳) $\frac{(a - b)^2}{2}$ ✓

(۴) $\frac{(a + b)^2}{2}$

۱۰- اگر اقطار یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) مستطیل ✓

(۳) لوزی

(۴) مربع

۱۱- اگر اقطار یک چهارضلعی با هم مساوی باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع

(۲) مستطیل

۱۲- اگر اوساط اضلاع یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ را به هم وصل کنیم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

۵ (۱) ☒ ۱۰ (۲)

۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

۱۳- در تست قبل، مساحت شکل حاصل چقدر است؟

۱۲ (۱) ۸ (۲)

۶ (۳) ☒ ۱۶ (۴)

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر اندازه‌ی

ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی وتر کدام است؟

۴ (۱) $4\sqrt{3}$

۴ (۲) ☒

۳ (۳)

۳ (۴) $3\sqrt{3}$

۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، دو برابر ارتفاع وارد بر وتر است. تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث کدام است؟

۱۵° (۱)

۷۵° (۲)

۳۰° (۳)

۶۰° (۴) ☒

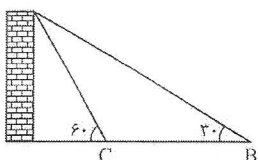
۱۶- در شکل مقابل، $\hat{B} = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 60^\circ$ و $BC = 112$ متر است. ارتفاع دیوار چند متر است؟

۵۶ (۱) ☒ $56\sqrt{3}$

۵۶ (۲) $56\sqrt{2}$

۶۰ (۳) $60\sqrt{3}$

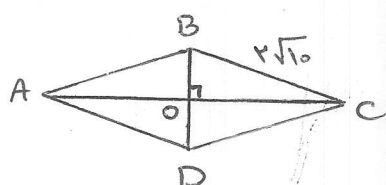
۶۰ (۴) $60\sqrt{2}$



ح خلاصه نویسی:

ح سوالات تشریحی:

۱- در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را بیابید. (تمرین ۱ صفحه ۷۲)



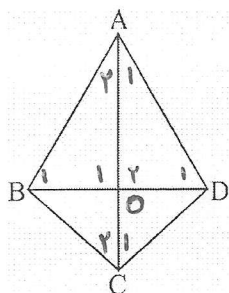
$$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{BO}{OC} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta BOC: BO^2 + OC^2 = (2\sqrt{10})^2 \rightarrow 10BO^2 = 40 \rightarrow BO = 2 \rightarrow BD = 4$$

$$\rightarrow OC = 3BO = 6 \rightarrow AC = 12$$

$$\rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$

۲- در چهارضلعی ABCD شکل مقابل، $AB=AD$ و $BC=CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟
 نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمساز \hat{A} و \hat{C} است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. (تمرین ۲ صفحه ۷۲)



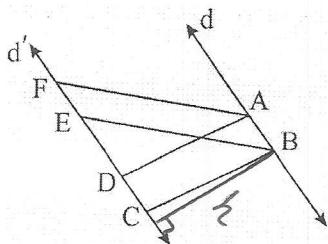
$$\begin{cases} AB=AD \\ BC=DC \\ AC=AC \end{cases} \xrightarrow{(ض/ض/ض)} \Delta ABC \cong \Delta ADC \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases} \rightarrow \hat{C} \text{ و } \hat{A} \text{ نیمساز } AC \text{ است}$$

$$\begin{cases} AB=AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AO=AO \end{cases} \xrightarrow{(ض/ض/ض)} \Delta AOB \cong \Delta AOD \rightarrow \begin{cases} OB=OD \quad (1) \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow BD \text{ عمودمنصف } AC$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

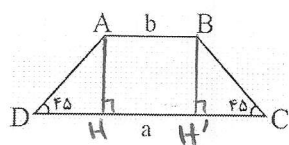
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاعها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S کدام است. (تمرین ۳ صفحه ۷۲)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \times h$$

$$S_{ABEF} = \frac{1}{2} AB \times h \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABEF} = S$$

۴- در دوزنقه‌ی شکل مقابل، اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. (تمرین ۴ صفحه ۷۲)

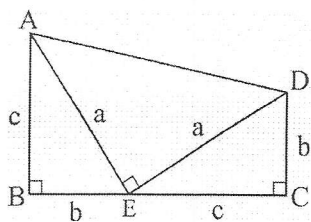


مشکلت‌های ADH و BCH' قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین اند:

$$AH = BH' = DH = CH' = \frac{a-b}{2}$$

$$S = \frac{(CD + AB) \times AH}{2} = \frac{(a+b) \left(\frac{a-b}{2} \right)}{2} = \frac{1}{4} (a^2 - b^2)$$

۵- مساحت دوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$①: S = \frac{(AB + CD) \times BC}{2} = \frac{(b+c) \times (b+c)}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}$$

$$②: S = S_{ABE} + S_{CDE} + S_{ADE} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

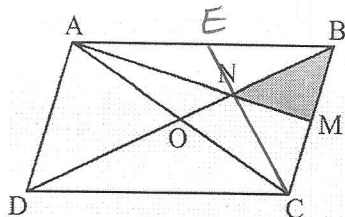
$$\rightarrow ① = ② \rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2bc + a^2$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

اثبات قضیه فیثاغورس

سؤالات تشریحی:

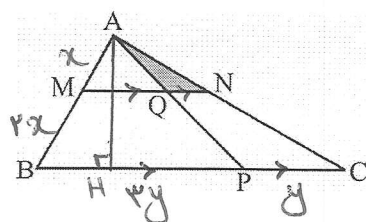
۱- در متوازی الاضلاع ABCD، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM، قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)



دهید: $S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)
 از آنجایی که N وسط BD است و AM پاره‌خطی است که از A به M می‌رسد و M وسط BC است، پس N وسط BD است.
 هر دو میانه‌ها است و پس: $\frac{1}{2} S_{ABCD}$

$$S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

۲- در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ است. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)

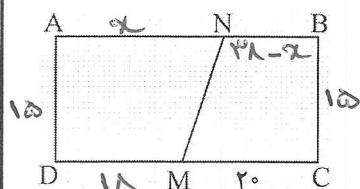


از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)
 $\hat{N} = \hat{C}$ و $\hat{A} = \hat{A}$ $\rightarrow \Delta AQN \sim \Delta APC$ $\rightarrow k = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$
 $\rightarrow \frac{S_{AQN}}{S_{APC}} = k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow S_{AQN} = \frac{1}{9} S_{APC}$
 $\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times PC}{\frac{1}{2} AH \times BC} = \frac{1}{3} \rightarrow S_{APC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \rightarrow S_{AQN} = \frac{1}{34} S_{ABC}$

$$S_{MQPB} = S_{ABC} - S_{AMQ} - S_{APC} = S_{ABC} - S_{AMN} + S_{AQN} - S_{APC}$$

$$= S - \frac{1}{9} S + \frac{1}{34} S - \frac{1}{3} S = \frac{2}{3} S$$

۳- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه‌ی با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود. (تمرین ۸ صفحه ۷۳)

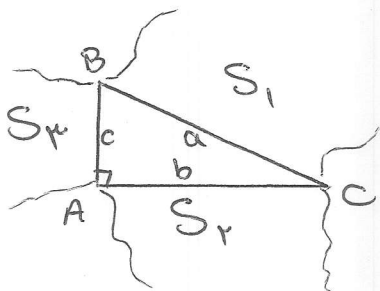


$$S_{ANMD} = S_{NBCM}$$

$$\frac{1}{2} (18 + x) \times 15 = \frac{1}{2} x (38 - x + 20) \times 15 \rightarrow 18 + x = 58 - x$$

$$\rightarrow 2x = 40 \rightarrow x = 20$$

۴- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه قائمه است. (تمرین ۹ صفحه ۷۳)



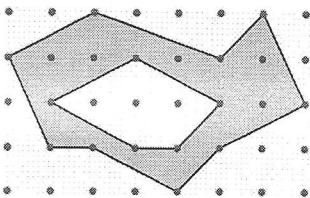
نسبت مساحت‌ها دو چندضلعی متشابه برابر k^2 (مقدور نسبت متشابه) است: $a^2 = b^2 + c^2$: رابطه فیثاغورس

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{b^2}{a^2} \quad \frac{S_3}{S_1} = \frac{c^2}{a^2} \quad \xrightarrow{+} \quad \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\rightarrow \frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\rightarrow S_2 + S_3 = S_1$$

۵- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (تمرین ۱۰ صفحه ۷۳)



$$S_1 = \frac{b_1}{2} - 1 + i_1 = \frac{9}{2} - 1 + 13 = \frac{33}{2}$$

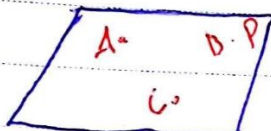
$$S_2 = \frac{b_2}{2} - 1 + i_2 = \frac{5}{2} - 1 + 3 = \frac{9}{2}$$

$$\rightarrow S_{\text{هاشور}} = S_1 - S_2 = \frac{33}{2} - \frac{9}{2} = 12$$

Subject:
Date:

فصل ۳ - تعمیم فضایی (هندسه فضایی)

خط و صفحه



نمایش صفحه ۳ نقطه نیازمند

نمایش خط ۲ نقطه نیازمند

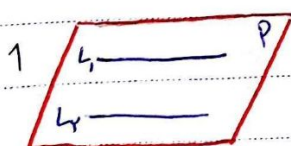
نکته ۸: از یک خط بی‌نهایت صفحه تولید می‌شود. روی هر خط بی‌نهایت نقطه و روی هر صفحه بی‌نهایت خط وجود دارد. وضعیت دو در فضا

۱- موازی ۸: به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، دو خط موازی می‌گویند.

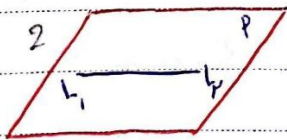
۲- منطبق ۸: به دو خط که در یک صفحه باشند و در بیش از یک نقطه مشترک هستند، دو خط منطبق می‌گویند.

۳- متقاطع ۸: به دو خط که در یک صفحه و در یک نقطه با هم مشترک اند، دو خط متقاطع می‌گویند.

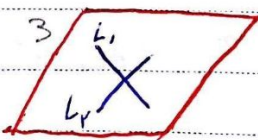
۴- متافره ۸: به دو خط که در یک صفحه قرار نداشته باشند، دو خط متافره می‌گویند.



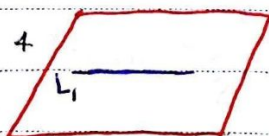
$L_1 \parallel L_2$



$L_1 = L_2$



$L_1 \cap L_2$



روی دیوار بقی است L_1

P = اسم صفحه

PAPCO

Subject:
Date:

وضعیت خط و صند در فضا

1. موازی: به خطی که با صند هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

2. متقاطع: به خط و صند ای که در یک نقطه مشترک اند. خط و صند متقاطع می‌توند.

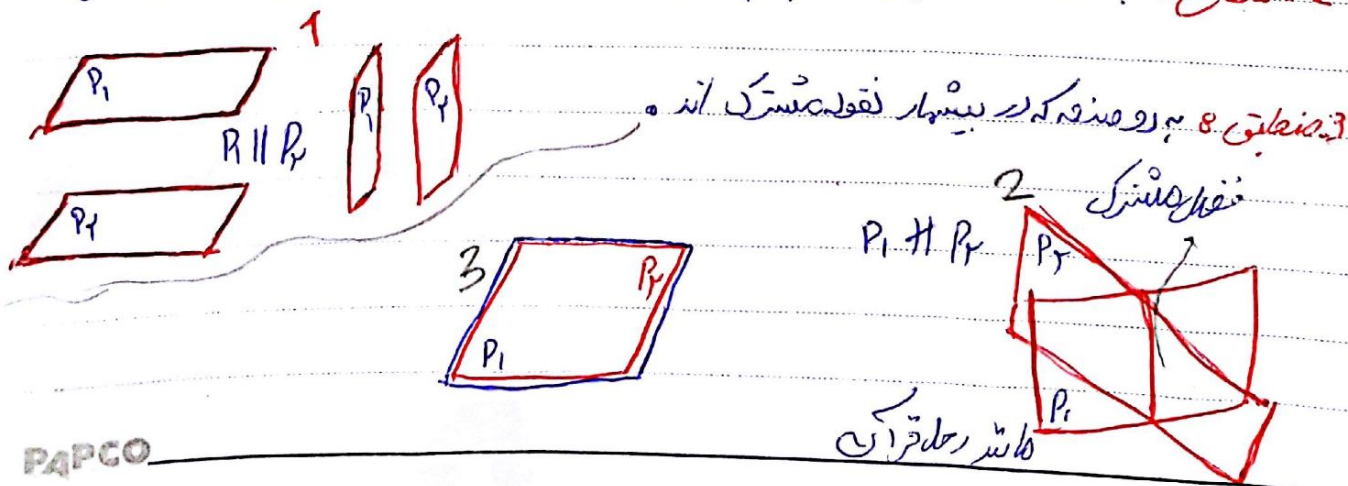
3. منطبق: به هر خط و صند که با صند در بیش از یک نقطه مشترک است.



وضعیت دو صند در فضا

1. موازی: به دو صند که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند و موازی می‌باشند.

2. متقاطع: به دو صند که در یک خط با هم مشترک اند. و به آن خط با هم مشترک دو صند گفته می‌شود.



PAPCO